1 Введение.

Открытой (непериодической) цепочкой Тоды будем называть систему, определяемую гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} + g^2 \sum_{i=1}^{n-1} \exp(2(q_i - q_{i+1}))$$

Заменим координаты $q_i \to q_i + (i-1)\log(|g|)$. Тогда можно считать $g = 1$.

Уравнения Гамильтона:

$$\begin{gathered} \dot{q_i} = p_i \\ \dot{p_i} = 2\exp(2(q_{i-1} - q_i)) - 2\exp(2(q_i - q_{i+1})), \quad 1 < i < n \\ \dot{p_1} = -2\exp(2(q_1 - q_2)), \\ \dot{p_n} = 2\exp(2(q_{n-1} - q_n)) \end{gathered}$$

Цель доклада — показать, что открытая цепочка Тоды является интегрируемой по Лиувиллю, то есть существует N независимых сохраняющихся величин в инволюции.

Важно отметить также что существует модель со сходим гамильтонианом:

$$H = H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} + g^2((\sum_{i=1}^{n-1} \exp(2(q_i - q_{i+1}))) + \exp(2(q_n - q_1))$$

Она называется замкнутой (периодической) цепочкой Тоды и, вообще говоря её поведение может значительно отличаться от поведения открытой цепочки Тоды.

2 Основные матричные соотношения.

2.1 Определения

$$\begin{gathered} E_{+k} := E_{k,k+1} \\ E_{-k} := E_{k+1,k} \\ H_j := E_{jj} - E_{j+1,j+1} \end{gathered}$$

2.2 Коммутаторы.

Запишем два основных соотношения, за счёт которых вычисляются все коммутаторы для линейных комбинаций матричных единиц.

$$\begin{gathered} E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} \\ [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj} \end{gathered}$$

Теперь вычислим сами коммутаторы:

$$
\begin{gathered}
[E_{-k}, E_{+j}] = [E_{k+1,k}, E_{j,j+1}] = \delta_{kj} E_{k+1,j+1} - \delta_{k+1,j+1} E_{j,k} = \delta_{kj}(E_{k+1,k+1} - E_{k,k}) = -\delta_{jk} H_k \\
[E_{-k}, E_{ii}] = \delta_{ik} E_{k+1,i} - \delta_{i,k+1} E_{ik} = (\delta_{ik} - \delta_{i,k+1}) E_{-k} \\
[E_{+k}, E_{ii}] = \delta_{i,k+1} E_{k,i} - \delta_{ik} E_{i,k+1} = (\delta_{i,k+1} - \delta_{ik}) E_{+k} \\
[E_{-k}, H_i] = [E_{k+1,k}, E_{ii} - E_{i+1,i+1}] = \delta_{ik} E_{k+1,i} - \delta_{k+1,i} E_{ik} - (\delta_{i+1,k} E_{k+1,i+1} - \delta_{ki} E_{i+1,k}) = \\
= (2\delta_{ik} - \delta_{k+1,i} - \delta_{k,i+1}) E_{-k} = C_{ik} E_{-k} \\
[E_{+k}, H_i] = [E_{k,k+1}, E_{ii} - E_{i+1,i+1}] = \delta_{i,k+1} E_{k,i} - \delta_{ki} E_{i,k+1} - (\delta_{ik} E_{k,i+1} - \delta_{k,i+1} E_{i+1,k+1}) = \\
= (\delta_{i,k+1} + \delta_{k+1,i} - 2\delta_{ki}) E_{+k} = -C_{ik} E_{+k} \\
[E_{-k}, E_{-j}] = [E_{k+1,k}, E_{j+1,j}] = \delta_{k,j+1} E_{k+1,j} - \delta_{j,k+1} E_{j+1,k+1} = \delta_{k,j+1} E_{k+1,k-1} - \delta_{j,k+1} E_{k+2,k} \\
[E_{+k}, E_{+j}] = [E_{k,k+1}, E_{j,j+1}] = \delta_{k+1,j} E_{k,j+1} - \delta_{j+1,k} E_{j,k+1} = \delta_{k+1,j} E_{k,k+2} - \delta_{j+1,k} E_{k-1,k+1}
\end{gathered}
$$

3 Пара Лакса.

Для поиска набора первых интегралов мы воспользуемся представлением Лакса уравнений движения.

3.1 Применение пары Лакса.

Пусть удалось привести систему уравнений к виду:

$$\dot{L} = [M, L]$$

Тогда рассмотрим задачу Коши:

$$
\begin{gathered}
\dot{U} = MU \\
U(0) = E
\end{gathered}
$$

Тогда:

$$
\begin{gathered}
\dot{L} = \dot{U}U^{-1}L - L\dot{(U)}U^{-1} \\
U^{-1}\dot{L}U = -\dot{U}^{-1}LU - U^{-1}L\dot{U} \\
\frac{d(U^{-1}LU)}{dt} = 0 \\
L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t)
\end{gathered}
$$

Таким образом набор собственных значений L сохраняется поскольку сохраняется характеристический многочлен L. Также возводя решение в степень нетрудно видеть что тоже справедливо и для L^k следовательно появляется набор сохраняющихся величин $\mathcal{H}_k = \frac{1}{k}\mathrm{Tr}(L^k)$.

3.2 Построение пары Лакса.

Будем искать пару Лакса в виде разложения по E_{ii}, E_{+k}, E_{-k} Запишем уравнения движения на импульсы в следующей матричной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} E_{jj}\dot{p_j} = \sum_{j=2}^{n} 2E_{jj}\exp(2(q_{j-1}-q_j)) - \sum_{j=1}^{n-1} 2E_{jj}\exp(2(q_j-q_{j+1})) = \sum_{j=1}^{n-1} -2H_j\exp(2(q_j-q_{j+1})) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} -[E_{+k}\exp(q_k-q_{k+1}), E_{-j}\exp(q_j-q_{j+1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(-[E_{+k}\exp(q_k-q_{k+1}), E_{-j}\exp(q_j-q_{j+1})] + [E_{-k}\exp(q_k-q_{k+1}), E_{+j}\exp(q_j-q_{j+1})])$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}[E_{+j}\exp(q_j-q_{j+1}), E_{+k}\exp(q_k-q_{k+1})] = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}[E_{-j}\exp(q_j-q_{j+1}), E_{-k}\exp(q_k-q_{k+1})] = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} E_{jj}\dot{p_j} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}[(E_{+k}+E_{-k})\exp(q_k-q_{k+1}), (E_{+j}-E_{-j})\exp(q_j-q_{j+1})] =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n-1}(E_{+k}+E_{-k})\exp(q_k-q_{k+1}), \sum_{j=1}^{n-1}(E_{+j}-E_{-j})\exp(q_j-q_{j+1})]$$

Рассмотрим теперь

$$[\sum_{k=1}^{n} p_k E_{kk}, \sum_{j=1}^{n-1}(E_{+j}-E_{-j})\exp(q_j-q_{j+1})] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} p_k\exp(q_j-q_{j+1})(\delta_{j,k}-\delta_{j+1,k})(E_{+j}+E_{-j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(p_j-p_{j+1})\exp(q_j-q_{j+1})(E_{+j}+E_{-j})$$

На уравнениях движения эта величина есть производная по времени выражения:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(E_{+k}+E_{-k})\exp(q_k-q_{k+1})$$

То есть:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n-1}(E_{+k}+E_{-k})\exp(q_k-q_{k+1})) = [\sum_{k=1}^{n} p_k E_{kk}, \sum_{j=1}^{n-1}(E_{+j}-E_{-j})\exp(q_j-q_{j+1})]$$

Складывая это уравнение с полученным ранее, получим:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n-1}(E_{+k}+E_{-k})\exp(q_k-q_{k+1}) + \sum_{j=1}^{n} E_{jj}p_j) =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n-1}(E_{+k}+E_{-k})\exp(q_k-q_{k+1}) + \sum_{j=1}^{n} E_{jj}p_j, \sum_{j=1}^{n-1}(E_{+j}-E_{-j})\exp(q_j-q_{j+1})]$$

Таким образом получаем пару Лакса:

$$L = \sum_{j=1}^{n} E_{jj} p_j + \sum_{i=1}^{n-1} (E_{+i} + E_{-i}) \exp(q_i - q_{i+1})$$

$$M = -\sum_{i=1}^{n-1} (E_{+i} - E_{-i}) \exp(q_i - q_{i+1})$$

Данное соотношение получено из уравнений движения. Обратно, рассмотрев диагональные элементы мы получим уравнения движения на импульсы. Рассмотрение оставшихся ненулевых составляющих матрицы даёт уравнения на разности скоростей:

$$\dot{q_{i+1}} - \dot{q_i} = p_{i+1} - p_i$$

Пара Лакса:

$$L = \sum_{j=1}^{n} E_{jj} p_j + \sum_{i=1}^{n-1} (E_{+i} + E_{-i}) \exp(q_i - q_{i+1})$$

$$M = -\sum_{i=1}^{n-1} (E_{+i} - E_{-i}) \exp(q_i - q_{i+1})$$

4 r - матричная структура.

4.1 Обоснование инволютивности при наличии r-матриц.

Будем далее использовать следующее обозначение: пусть A - матрица, тогда:

$$A_1 := A \otimes E$$
$$A_2 := E \otimes A$$

Запишем:

$$\mathrm{Tr}_{12}(\{A_1, B_2\}) = \sum_{i,j,k,l} \{A_{ij}, B_{kl}\} \mathrm{Tr}_{12}(E_{ij} \otimes E_{kl}) =$$
$$= \sum_{i,j,k,l} \{A_{ij}, B_{kl}\} \delta_{ij} \delta_{kl} = \sum_{i,k} \{A_{i,i}, B_{k,k}\} = \{\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(B)\}$$
$$\{A_1 B_1, C_2\} = \sum_{i,t,j,k,l} \{A_{it} B_{tj}, C_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl} = \sum_{i,j,k,l} \sum_{e,f} A_{ie} \{B_{fj}, C_{kl}\} (E_{ie} E_{fj}) \otimes E_{kl} +$$
$$+ \sum_{i,j,k,l} \sum_{e,f} B_{fj} \{A_{ie}, C_{kl}\} (E_{ie} E_{fj}) \otimes E_{kl} = \sum_{i,j,k,l} \sum_{e,f} A_{ie} \{B_{fj}, C_{kl}\} (E_{ie} \otimes E)(E_{fj} \otimes E_{kl}) +$$
$$+ \sum_{i,j,k,l} \sum_{e,f} B_{fj} \{A_{ie}, C_{kl}\} (E_{ie} \otimes E_{kl})(E_{fj} \otimes E) = A_1 \{B_1, C_2\} + \{A_1, C_2\} B_1$$
$$\{A_1, B_2 C_2\} = \{A_1, B_2\} C_2 + B_2 \{A_1, C_2\}$$
$$\mathrm{Tr}_{12}((E_{ij} \otimes E_{kl})(E_{mn} \otimes E_{rt})) = \mathrm{Tr}_{12}(E_{ij} E_{mn} \otimes E_{kl} E_{rt}) = \mathrm{Tr}(E_{ij} E_{mn}) \mathrm{Tr}(\mathrm{E_{kl} E_{rt}}) =$$
$$= \mathrm{Tr}(E_{mn} E_{ij}) \mathrm{Tr}(\mathrm{E_{rt} E_{kl}}) = \mathrm{Tr}_{12}((E_{mn} \otimes E_{rt})(E_{ij} \otimes E_{kl}))$$

Из чего сразу в силу линейности:

$$\mathrm{Tr}_{12}(AB) = \mathrm{Tr}_{12}(BA)$$

Из чего следует возможность перестановки множителей в следе циклически. Из данных соотношений получаем:

$$\mathrm{Tr}_{12}(\{L_1^m, L_2^n\}) = \mathrm{Tr}_{12}(L_1\{L_1^{m-1}, L_2^n\} + \{L_1, L_2^n\}L_1^{m-1}) = \mathrm{Tr}_{12}(L_1\{L_1^{m-1}, L_2^n\} + L_1^{m-1}\{L_1, L_2^n\}) =$$
$$= m\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}\{L_1, L_2^n\}) = m\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}(\{L_1, L_2\}L_2^{n-1} + L_2\{L_1, L_2^{n-1}\})) =$$
$$= m\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}(\{L_1, L_2\}L_2^{n-1} + \{L_1, L_2^{n-1}\}L_2)) = mn\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}\{L_1, L_2\}L_2^{n-1})$$

Теперь воспользуемся доказанным утверждением про скобку следов и r-матрицей:

$$\{\mathrm{Tr}(L_1^m), \mathrm{Tr}(L_2^n)\} = \mathrm{Tr}_{12}(\{L_1^m, L_2^n\}) = mn\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}\{L_1, L_2\}L_2^{n-1}) =$$
$$= mn\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}([r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2])L_2^{n-1}) = mn(\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}r_{12}L_1L_2^{n-1}) - \mathrm{Tr}_{12}(L_1^m r_{12}L_2^{n-1}))-$$
$$-\mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}r_{21}L_2^n) + \mathrm{Tr}_{12}(L_1^{m-1}L_2r_{21}L_2^{n-1}))$$

Требуемое следует из перестановочности L_1 с L_2 и возможности циклической перестановки множителей в Tr_{12}

4.2 Построение r-матриц

Рассчитаем скобку Пуассона для L_1, L_2:

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\{p_i, \exp(q_l - q_{l+1})\}E_{ii} \otimes (E_{+l} + E_{-l}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\{\exp(q_l - q_{l+1}), p_i\}(E_{+l} + E_{-l}) \otimes E_{ii} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n-1}\exp(q_l - q_{l+1})(H_l \otimes (E_{+l} + E_{-l}) - (E_{+l} + E_{-l}) \otimes H_l)$$

$$[r_{12}, L_1 + L_2] = \sum_{i=1}^{n} p_i[r_{12}, E_{ii} \otimes E + E \otimes E_{ii}]+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\exp(q_k - q_{k+1})[r_{12}, (E_{+k} + E_{-k}) \otimes E + E \otimes (E_{+k} + E_{-k})]$$

Из этого получаем:

$$[r_{12}, H_i \otimes E + E \otimes H_i] = 0$$
$$[r_{12}, (E_{+k} + E_{-k}) \otimes E + E \otimes (E_{+k} + E_{-k})] = H_k \otimes (E_{+k} + E_{-k}) - (E_{+k} + E_{-k}) \otimes H_k$$

Можно непосредственно проверить, что данным соотношениям удовлетворяет:

$$r_{12} = \sum_{j>i}(E_{ij} \otimes E_{ji} - E_{ji} \otimes E_{ij})$$

5 Независимость $\mathcal{H}_k$

Как мы показали ранее величины $\mathcal{H}_k$ находятся в инволюции, однако этого всё ещё недостаточно для интегрируемости - необходимо показать также и независимость $\mathcal{H}_k$. Запишем L в виде: $L = P + Q$, Где $P = \sum_{j=1}^{n} E_{jj}p_j$ Тогда Q Зависит только от координат и все её диагональные элементы - нулевые.

$$L^k = P^k + R$$

Где R будет представляться в виде суммы матриц вида $P...PQ...QP...P...$ при этом вхождений P может быть не более чем $k-1$, тогда:

$$\mathrm{Tr}(L^k) = \frac{1}{k}(\sum_{j=1}^{n} p_j^k + \mathcal{R}_{n-1}(p_i))$$

Запишем дифференциал:

$$d\mathcal{H}_k = (p_1^{k-1} + \mathcal{R}_{k-2}^1(p_i), p_2^{k-1} + \mathcal{R}_{k-2}^2(p_i), ..., p_n^{k-1} + \mathcal{R}_{k-2}^n(p_i), ...)$$

Посмотрим теперь на определитель системы первых n столбцов в матрице Якоби: отсортируем мономы сначала по сумме степеней, тогда становится ясно, что мономы высшей степени возникают только в виде $\pm p_{i_1}^{n-1} p_{i_2}^{n-2} ... p_{i_n}^{0}$ и только по одному разу, что даёт оценку на размерность поверхности вырождения сверху как 2n - 1. Таким образом почти всюду интегралы $\mathcal{H}_k$ независимы, что даёт последнее условие в определении системы интегрируемой по Лиувиллю.

6 Высшие Гамильтонианы

Приведём примеры вида $\mathcal{H}_k$:

Представление Лакса: $L = \sum_{j=1}^{n} E_{jj}p_j + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(q_k - q_{k+1})(E_{+k} + E_{-k})$
Из чего сразу следует, что

$$\mathcal{H}_1 = Tr(L) = \sum_{j=1}^{n} p_j$$

$$L^2 = \sum_{j=1}^{n} E_{jj}p_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}(E_{jj}(E_{+k} + E_{-k}) + (E_{+k} + E_{-k})E_{jj})p_j \exp(q_k - q_{k+1}) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(E_{+k} + E_{-k})(E_{+m} + E_{-m}) \exp(q_k - q_{k+1}) \exp(q_m - q_{m+1})$$

В след внесёт вклад первая сумма, а также слагаемые вида $E_{+k}E_{-k} = E_{kk}$, $E_{-k}E_{+k} = E_{k+1,k+1}$ в третьей сумме.

$$Tr(L^2) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_j - q_{j+1}) = 2H$$

Тем самым:

$$\mathcal{H}_2 = H$$

Для подсчёта $\mathcal{H}_3$ выпишем ещё раз L^2:

$$L^2 = \sum_{j=1}^{n} E_{jj} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} (E_{jj}(E_{+k} + E_{-k}) + (E_{+k} + E_{-k})E_{jj}) p_j \exp(q_k - q_{k+1}) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (E_{+k} + E_{-k})(E_{+m} + E_{-m}) \exp(q_k - q_{k+1}) \exp(q_m - q_{m+1}) = \sum_{j=1}^{n} E_{jj} p_j^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (E_{+k} + E_{-k})(p_{k+1} + p_k) \exp(q_k - q_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} (E_{k+1,k+1} + E_{kk}) \exp(2(q_k - q_{k+1})) + ...$$

Где ... - матрица с нулевыми диагональными и околодиагональными элементами, потому (из вида L) не вносящая вклада в $\mathcal{H}_3$.

$$\mathrm{Tr}(L^3) = \sum_{j=1}^{n} p_j^3 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (p_k + p_{k+1}) \exp(2(q_k - q_{k+1})) + \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} + p_k) \exp(2(q_k - q_{k+1})) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} p_j^3 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} (p_k + p_{k+1}) \exp(2(q_k - q_{k+1}))$$

Тем самым:

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} p_j^3 + \sum_{k=1}^{n-1} (p_k + p_{k+1}) \exp(2(q_k - q_{k+1}))$$

6.1 Интегралы движения как Гамильтонианы:

Рассмотрим $\mathcal{H}_k$ как Гамильтонианы, задающие уравнения движения:

$$\frac{dL}{dt_n} = \{\mathcal{H}_n, L\}$$

Из существования r-матричной структуры следует, что для данных уравнений движения существует пара Лакса L, M_n. Доказательство:

$$\{\mathcal{H}_n, L\} = \{\mathrm{Tr}(L^n), L\} = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}_1(\{L_1^n, L_2\}) = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}_1(\{L_1^n, L_2\}) =$$
$$= \frac{1}{n} \mathrm{Tr}_1(n L_1^{n-1} \{L_1, L_2\}) = \mathrm{Tr}_1(L_1^{n-1} [r_{12}, L_1 + L_2]\}) = [\mathrm{Tr}_1(L_1^{n-1} r_{12}), L]$$

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим $\mathcal{H}_1$. Непосредственный рассчёт даёт:

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{j=1}^{n} p_j$$
$$M_1 = \mathrm{Tr}_1(r_{12}) = 0$$

Следовательно $\mathcal{H}_1$ как Гамильтониан задаёт равномерное движение всей цепочки как целого с постоянной скоростью.

7 Связь с алгеброй.

7.1 Основные определения и теоремы:

Определение Нормализатором подалгебры H алгебры Ли L называется:

$$N(H) = \{x \in L | \forall h \in H : [x, h] \in H\}$$

Определение Алгебра Ли L называется нильпотентной, если:

$$\exists n \in \mathbb{N} : L^n = 0$$

Где $L^n := [L^{n-1}, L], L^1 := L$

Определение Подалгеброй Картана алгебры Ли называется нильпотентная подалгебра, нормализатор которой с ней совпадает.

Определение: Алгебра Ли L называется простой, если не имеет собственных подалгебр, замкнутых относительно умножения на элементы L. Если нет таких коммутативных подалгебр, то L называется полупростой.

Определение: Пусть задано представление ρ алгебры Ли L на конечномерном пространстве V (над $\mathbb{C}$), а λ - одномерное представление L.
Тогда:

$$V_\lambda := \{v \in V | \forall x \in L \, \exists \, n(x) \in \mathbb{N} : (\rho(x) - \lambda(x))^{n(x)}(v) = 0\}$$

Если $V_\lambda \neq 0$, то λ называется весом, а соответствующее V_λ весовым пространством.

Теорема: Для всякого представления нильпотентной алгебры Ли праведливо разложение:

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

Кроме того V_λ инвариантны.

Будем теперь рассматривать присоединённое представление подалгебры Картана H алгебры Ли L на L. В силу нильпотентности H, для присоединённого представления H на L справедлива теорема приведённая выше.

Утверждение:

$$L_0 = H$$

Весовые пространства в случае присоединённого представления также называют корневыми. $\lambda \neq 0$ такие что $L_\lambda \neq 0$ называют корнями.

Утверждение:

$$[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$$

Определение: Билинейное отображение $Tr(ad(x) \cdot ad(y))$ называется формой Киллинга.

Утверждение: Теперь пусть алгебра Ли L - полупростая, тогда справедливы следующие утверждения:
1) Если α - корень, то $c\alpha$ - корень тогда и только тогда когда $c = -1$
2) Форма Киллинга на подалгебре Картана невырождена.
3) $L_\mu \perp L_\nu$ при $\mu \neq -\nu$
4) Корневые пространства L_λ одномерны.
5) Подалгебра Картана коммутативна.

Из данных утверждений следует, что каждому корню с помощью формы Киллинга можно сопоставить вектор. Такой вектор называется корневым. В силу одномерности и инвариантности L_λ подалгебра Картана действует на них умножением на число.

7.2 О системах корней:

В общем случае системой корней в векторном пространстве V с заданным скалярным произведением называется конечное множество векторов Φ такое что:

$$< h >_{h \in \Phi} = V$$
$$\forall h \in \Phi : S_h(\Phi) \subset \Phi$$
$$2\frac{(h,v)}{(h,h)} \in \mathbb{Z}$$

Где по определению:

$$S_h(v) := v - 2\frac{(h,v)}{(h,h)}h$$

Если задан линейный функционал не зануляющийся на Φ, то можно по знаку этого функционала определить корни положительными/отрицательными.

Также среди положительных корней можно выделить систему простых корней - базис лежащий в Φ такой что разложение по нему для векторов в Φ происходит только с положительными или только с отрицательными целыми коэффициентами.

В применении к алгебрам Ли определению системы корней удовлетворяет как набор одномерных представлений λ названных в предыдущем разделе корнями, так и набор корневых векторов.

7.3 Связь с цепочкой Тоды:

В данном докладе основными используемыми матрицами были E_{+k}, E_{-k}, H_i, E_{+k} образуют простую систему положительных корней алгебры Ли $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$, а H_i являются базисом подалгебры Картана в этой алгебре. В соответствии с этим её ранг: n - 1.

При построении пары Лакса и r-матриц были использованы соотношения:

$$[E_{+k}, E_{-j}] = \delta_{ij} H_i$$
$$[H_j, H_k] = 0$$
$$[H_i, E_{\pm j}] = \pm C_{ij} H_j$$

Которые имеют схожий вид и для других полупростых алгебр Ли. Благодаря этому удаётся построить обобщение: для простой алгебры Ли с подалеброй Картана $< H_i >$ и корневыми пространствами $< E_\alpha >$. Строятся векторы импульсов и координат в виде:

$$p = \sum_{i=1}^{r} p_j H_j$$
$$q = \sum_{i=1}^{r} q_j H_j$$

Функция Гамильтона:

$$H = \frac{(p,p)}{2} + \sum_{\alpha\ simple} \exp(2\alpha(q))$$

При этом использованные нами коммутационные соотношения будут иметь вид для положительных простых α, β:

$$[E_{+\alpha}, E_{-\beta}] = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha$$
$$[H_\alpha, H_\beta] = 0$$
$$[H_\alpha, E_{\pm\beta}] = \pm 2 < H_\alpha, H_\alpha > C_{\alpha\beta} E_\beta$$

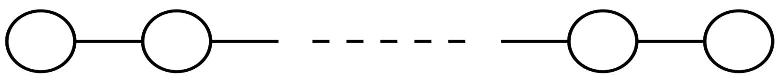
Где $C_{\alpha\beta} = 2\frac{<H_\alpha, H_\beta>}{<H_\alpha, H_\alpha>}$, (α, β - положительные простые) - матрица Картана. Здесь предполагается нормировка $< E_\alpha, E_{-\alpha} >= 1$ В этом случае пара Лакса и r-матрицы получаются такими:

$$L = p + \sum_{\alpha \; simple} \exp(\alpha(q))(E_\alpha + E_{-\alpha})$$
$$M = - \sum_{\alpha \; simple} \exp(\alpha(q))(E_\alpha - E_{-\alpha})$$
$$r_{12} = \sum_{\alpha > 0} \frac{E_\alpha \otimes E_{-\alpha} - E_{-\alpha} \otimes E_\alpha}{(E_\alpha, E_{-\alpha})}$$

Оказывается, что полупростые алгебры Ли однозначно определяются видом матрицы Картана: с помощью неё строится диаграмма Дынкина по следующим правилам: Пусть ранг алгебры r. Строится граф из r вершин, вершины с различными номерами соединяются $n_{ij} = C_{ij} C_{ji}$ ребрами. При этом из свойств систем корней следует, что n_{ij} может принимать значения в диапазоне от 0 до 3. Оказывается справедливым и более сильное утверждение: по Диаграмме Дынкина однозначно восстанавливается разложение полупростой алгебры на простые и их вид.

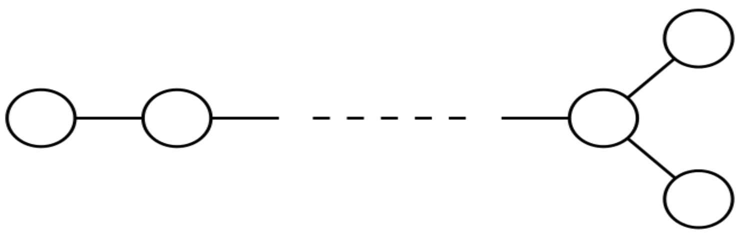
7.3.1 Примеры:

В основной части доклада рассматривалась система корней A_{n-1} соответствующая алгебре $sl(n, \mathbb{C})$. Диаграмма Дынкина для неё:



Как можно видеть из построения пары Лакса для $sl(n, \mathbb{C})$ ей соответствовал набор корней $\{e_1 - e_2, ..., e_{n-1} - e_n\}$

Рассмотрим теперь систему корней D_n соответствующую алгебре $so(2n)$: В этом случае диаграмма имеет вид:



Соответствующий набор корней: $\{e_1 - e_2, ..., e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$

Для него получаем Гамильтониан:

$$H = \frac{(p,p)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(2(q_i - q_{i+1})) + \exp(q_{n-1} + q_n)$$