Накаждима vs Грассман via Bun

6 мая 2019 г.

1 Эквивариантные расслоения

Обозначим за S компоктификацию $\mathbb{C}^2$. Нас интересуют $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Определение 1. *$Bun_N^a(\mathbb{C}^2)$ — пространство модулей расслоений на S ранга N с инстантонным числом $c_2 = a$ и тривиализацией на "бесконечности"(то есть изоморфизм $t\colon \mathcal{F}_{S\setminus\mathbb{C}^2} \to \mathcal{O}_{S\setminus\mathbb{C}^2}^{\oplus N}$).*

Замечание 1. Пространство $Bun_N^a(\mathbb{C}^2)$ на зависит от S.

Будем обозначать $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ и $z \in \mathbb{C}^\times$. Мы хотим изучать $\mathbb{C}^\times$-эквивариантные расслоения на $\mathbb{C}^2$ относительно действия $\rho_z(s,t) = (zs, z^{-1}t)$. Говоря эвристически, эквивариантные расслоения разбиваются в дизъюнктное объединение по λ и μ, где λ — кохарактер действия $\mathbb{C}^\times$ в нуле, а μ — на бесконечности. Остаток этой секции посвящён сторогому определению этих слов.

Определим действие ρ_μ группы $\mathbb{C}^\times$ на $Bun_N^a(\mathbb{C}^2)$ следующим образом. Расслоение $\mathcal{F}$ переходит в $\rho_z^*\mathcal{F}$; при этом отображение тривиализации подправляется на z^μ.

Определение 2. *$Bun_{N,\mu}^a(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ — это подпространство наподвижных точек $Bun_N^a(\mathbb{C}^2)$ относительно действия ρ_μ.*

Мы определили $Bun_{N,\mu}^a(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ как подмножество в множестве всех расслоений. Но в нашей ситуации на этих расслоениях автоматически появляется эквивариантная структура.

Определение 3. *$Bun_{N,\mu}^{a,\lambda}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ — подпространство в $Bun_{N,\mu}^a(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ для которого $\mathbb{C}^\times$ действует с кохарактером λ на слое в нуле.*

Заметим, что $Bun_{N,\mu}^a(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times) = \coprod_\lambda Bun_{N,\mu}^{a,\lambda}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$.

2 Теорема

Теорема 1. *Множество $Bun_{N,\mu}^{a,\lambda}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ непусто только при $a = \frac{1}{2}(\langle\lambda,\lambda\rangle - \langle\mu,\mu\rangle)$. При этом*

$$\mathcal{M}^{reg}(\bar{v},\bar{w}) = Bun_{N,\mu}^{a,\lambda}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times) = \mathcal{W}_\mu^\lambda \tag{1}$$

Где $\bar{v}$ и $\bar{w}$ опрделены следующим образом. i-ая координата $\bar{w}$ равна кратности вхождения числа i в μ. Кратность вхождения числа i в λ равна $w_i + v_{i-1} + v_{i+1} - 2v_i$ (cf. $w - Cv$).

Чтобы доказать теорему, нужно доказать $Bun_{N,\mu}^{a,\lambda}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times) = \mathcal{W}_\mu^\lambda$ (это получается из конструкцией склейки) и $Bun_{N,\mu}^{a,\lambda}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times) = \mathcal{M}^{\mathrm{reg}}(\bar{v},\bar{w})$ (это следует из ADHM-описания).

3 Склейка

Напомним, что мы используем координанты s, t на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Лемма 1 (ключевая)**.** *Расслоение $\mathcal{F} \in Bun^{a,\lambda}_{N,\mu}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ тривиально на множестве $t \neq 0$.*

Доказательство. Расслоение на прямой $t = \infty$ тривиально. Априори, расслоение могло бы стать нетривиальным на конечном числе прямых $t = t_i$. Но этого не происходит в силу $\mathbb{C}^\times$-эквиваринатности. Следовательно, мы можем продолжить твивиализацию с прямой $s = \infty$ на всё множество $t \neq 0$. □

Определим действие $\bar{\rho}_\mu$ на Gr_{GL_N} по формуле $z\,(h(t)) = z^\mu h(z^{-1}t)$ (cf. определение ρ_μ в Разделе 1).

Предложение 1. *$Bun^{a,\lambda}_{N,\mu}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times)$ определяется $\mathbb{C}^\times$-эквивариантным отображением $f\colon \mathbb{P}^1 \to Gr_{GL_N}$.*

Доказательство. Согласно Лемме 1 наше расслоение тривиализовано вне $t = 0$. Ограничивая расслоение на каждое конкретное s даёт точку аффинного грасманиана. Отображение в грассманиан говорит нам, какое нетривиально расслоение живёт на $t = 0$ и как его склеить с нашим. □

Предложение 2. *$Bun^{a,\lambda}_{N,\mu}(\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times) = \mathcal{W}^\lambda_\mu$*

Эскиз доказательства. По эквивариантному отображению f можно получить точку грассманиана $f(1)$. В силу эквивариантности, $f(s)$ восстанавливается по формуле $s\,(f(1))$. Утверждается, что $t^\mu f(1) \in \mathcal{W}^\lambda_\mu$. □

3.1 Пример: $N = 2$, $a = 1$

Нужно взять $\lambda = (1, -1)$ и $\mu = (0, 0)$. Упомянутое выше отображение в Gr_{GL_N} задано формулой

$$\begin{pmatrix} s^{-1}t^{-1}\alpha_1 + \beta_1 & \alpha_1 \\ s^{-1}t^{-1}\alpha_2 + \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Так как $\mu = 0$, действие $\bar{\rho}_\mu$ просто действует на s и t; в частности, наше отображение $\mathbb{C}^\times$-инвариантно (следовательно, расслоение $\mathbb{C}^\times$-эквивариантно). Предел $s \to \infty$ даёт

$$\lim_{s\to\infty} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \qquad \lim_{s\to 0} = \begin{pmatrix} t^{-1}\alpha_1 & t\tilde{\alpha}_1 \\ t^{-1}\alpha_2 & t\tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix} G(\mathcal{O})$$

то есть склеянное нами расслоение тривиализованно на бесконечности; в нуле передел существует только как точка афинного грасмана, а не как матрица.

4 ADHM: пример

Давайте опять разберём пример $N = 2$, $a = 1$. При этом $\lambda = (1, -1)$; а $\mu = (0, 0)$ (то есть $\bar{w} = 2e_0$).

$$v_0 + v_{-2} - 2v_{-1} = 1 \tag{2}$$

$$2 + v_{-1} + v_1 - 2v_0 = 0 \tag{3}$$

$$v_0 + v_2 - 2v_1 = 1 \tag{4}$$

Тогда $v_0 = 1$, а все прочие $v_i = 0$. Итак, у нас получился A_1-колчан, где всё сидит в весе 0.

Замечание 2. Забавно, что на ADHM-данных вообще нет никакого действия, а на слое в нуле и расслоения — есть.

Итак, в терминах ADHM-данных $x = \bar{x} = 0$, $ij = 0$. Значит ji – это нильпотентная матрица. Ей мы сопоставляем $1 + t^{-1}ji \in Gr_{GL_2}$.