Некоторые вопросы теории классических калибровочных полей

Скалярное поле

Скалярное поле ϕ - простейший пример поля в физике. Мы сразу рассмотрим случай $\phi \in \mathbb{C}$. Упрощение к $\mathbb{R}$ получается из равенства $\overline{\phi} = \phi$. Работаем с $||g_{\mu\nu}|| = diag(1, -1, -1, -1)$. Требуем Пуанкаре-инвариантность, второй порядок итогового уравнения (производные должны входить не более, чем квадратично) и его линейность (лагранжиан должен быть квадратичен по полю):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\overline{\phi}\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\overline{\phi}\phi \tag{1}$$

После варьирования он приводит к следующим уравнениям движения (Klein-Gordon-Фок):

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = 0;\ \left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\overline{\phi} = 0 \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что этот лагранжиан симметричен относительно абелевой группы $U(1)$:

$$\phi \longmapsto e^{-i\alpha}\phi, \quad \overline{\phi} \longmapsto e^{i\alpha}\overline{\phi} \tag{3}$$

Эта симметрия носит глобальный характер в том смысле, что $\alpha \neq \alpha(x)$. Она приводит к появлению сохраняющегося ($\partial_\mu j^\mu = 0$) тока

$$j^\mu = -i(\overline{\phi}\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\overline{\phi}) \tag{4}$$

При α, зависящем от точки пространства, симметрия нарушается, поскольку

$$\partial_\mu\phi \longmapsto e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu\phi - i\phi\partial_\mu\alpha(x)) \tag{5}$$

Можно модифицировать теорию, включив в неё и локальную симметрию $U(1)$. Из (5) видно, что это получится осуществить, если скомпенсировать второе слагаемое. Для этого добавим в нашу теорию электромагнитное поле, и свяжем его со скалярным так называемой *ковариантной производной*, которая заменит обычную:

$$\mathcal{D}_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - iA_\mu\phi; \quad \mathcal{D}_\mu\overline{\phi} \equiv \partial_\mu\overline{\phi} + iA_\mu\overline{\phi} \tag{6}$$

Здесь A_μ - электромагнитный 4-потенциал, допускающий калибровку:

$$A_\mu \longmapsto A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \tag{7}$$

Задача 1. *Докажите, что $\mathcal{D}_\mu\overline{\phi}\mathcal{D}^\mu\phi$ - это калибровочный инвариант.*

Лагранжиан, соответственно, примет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu\overline{\phi}\mathcal{D}^\mu\phi - V(\overline{\phi}\phi) \tag{8}$$

Первое слагаемое - это лагранжиан свободного электромагнитного поля, второе слагаемое содержит кинетическую составляющую скалярного поля, и его связь с электромагнитным, а третье - потенциал скалярного поля. Самая интересная часть содержится в уравнениях движения, которые получаются из (8):

$$\begin{cases} \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + V'(\overline{\phi}\phi)\phi = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = i(\phi\mathcal{D}^\nu\overline{\phi} - \overline{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi) \end{cases} \tag{9}$$

Как мы видим, второе уравнение совпадает с второй парой уравнений Максвелла с соответствующим током $j^\mu = i(\phi\mathcal{D}^\nu\overline{\phi} - \overline{\phi}\mathcal{D}^\nu\phi)$. В этом смысле скалярное поле выступает источником электромагнитного.

Задача 2. *Выведите уравнения движения (9) из лагранжиана (8).*

SU(2)

Можно рассмотреть обобщение прошлого пункта на неабелев случай с группой симметрий $SU(2)$.

Определение. *$SU(2)$ - группа Ли унитарных матриц 2×2 с единичным определителем.*

Из определения можно сразу записать:

$$\omega = \begin{pmatrix} z & p \\ q & r \end{pmatrix}, \quad \omega^{-1} = \begin{pmatrix} r & -p \\ -q & z \end{pmatrix} = \omega^{\ddagger} = \begin{pmatrix} \overline{z} & \overline{q} \\ \overline{p} & \overline{r} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Тогда сам элемент группы ω и условие единичного детерминанта перепишутся в виде:

$$\omega = \begin{pmatrix} z & p \\ -\overline{p} & \overline{z} \end{pmatrix} \implies |z|^2 + |p|^2 = 1 \tag{11}$$

Из последнего равенства очевидно, что групповое многообразие группы $SU(2)$ - трехмерная гиперсфера S^3. Отдельный интерес представляет алгебра Ли $\mathrm{Lie}(SU(2))$, описывающая структуру группы вблизи единицы. В силу непрерывности группы $SU(2)$ осуществим разложение по малому вещественному параметру ε:

$$G = 1 + \varepsilon A + O(\varepsilon^2) = e^{\varepsilon A} + O(\varepsilon^2) \tag{12}$$

В силу унитарности имеем первое свойство алгебры Ли $SU(2)$:

$$1 = G^{\ddagger} G = (1 + \varepsilon A^{\ddagger} + O(\varepsilon^2))(1 + \varepsilon A + O(\varepsilon^2)) = 1 + \varepsilon A^{\ddagger} + \varepsilon A + O(\varepsilon^2) \implies \boxed{A^{\ddagger} = -A} \tag{13}$$

В силу тождества $\ln(\det M) = \mathrm{Tr}(\ln M)$ и условия единичного детерминанта имеем второе свойство:

$$\ln(\det G) = \ln(1) = 0 = \mathrm{Tr}(\ln e^{\varepsilon A}) \implies \boxed{\mathrm{Tr}\, A = 0} \tag{14}$$

В этом пространстве можно выбрать базис (генераторы алгебры Ли) в виде $T_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$, где σ_i - матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

В физике под алгеброй $SU(2)$ часто понимают не антиэрмитовы, а эрмитовы матрицы. В этом случае базис выбирают в виде $T_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. Соотношения на структурные константы (здесь ϵ_{ijk} - символ Леви-Чивиты):

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \tag{16}$$

Если наделить множество таких A, которые осуществляют произведенное выше разложение, операцией коммутации $[A, B] = AB - BA$, получим порожденную этой группой алгебру Ли $\mathrm{Lie}(SU(2))$.

Можно попытаться произвести обратную операцию - по алгебре восстановить группу - но покрытие может быть неполным.

Задача 3. *Покажите, что экспоненцированием элементов $\mathrm{Lie}(SU(2))$ можно получить любой элемент $SU(2)$.*

Задача 4. *Покажите, что если функция координат $\omega(x)$ лежит в $SU(2)$ и поле A_μ принадлежит её алгебре Ли, то $\omega A_\mu \omega^{-1}$ и $\omega \partial_\mu \omega^{-1}$ также принадлежат $\mathrm{Lie}(SU(2))$*[1].

Гладкие семейства матриц (группы Ли) образуют дифференцируемые многообразия размерности группы. Алгебра Ли данной группы Ли есть касательное пространство к групповому многообразию в единице, т.е.:

$$\mathrm{Lie}(G) = \{A \,|\, g(t) = 1 + At + O(t^2)\} \tag{17}$$

[1] Указание: воспользуйтесь тождеством $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \ldots$

Неабелевы калибровочные поля и теория Янга-Миллса

Посмотрим на простейшую модель с симметрией $SU(2)$: 2 скалярных поля ϕ_i. Введем комплекснозначный вектор-столбец $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ и рассмотрим следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\ddagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\ddagger \phi) \tag{18}$$

Видно, что он инвариантен относительно преобразований фундаментального представления группы $SU(2)$, т.е. $\phi \longmapsto \omega\phi$, $\omega \in SU(2)$. Это глобальная симметрия, т.е. ω не зависит от x. Следуя логике первого раздела, попробуем модифицировать производную, чтобы добиться локальной $SU(2)$-инвариантности:

$$\mathcal{D}_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi + A_\mu \phi \tag{19}$$

Здесь A_μ, вообще говоря, матрицы размера 2×2. Выясним структуру поля A_μ. Для этого запишем условие инвариантности члена с производной:

$$\omega : \mathcal{D}_\mu \phi^\ddagger \mathcal{D}^\mu \phi \longmapsto \mathcal{D}_\mu \phi^\ddagger \mathcal{D}^\mu \phi \implies (\mathcal{D}_\mu \phi)' = \omega \mathcal{D}_\mu \phi \tag{20}$$

Задача 5. *Покажите, что из условия (18) следует закон преобразования для поля A_μ:*

$$A_\mu \longmapsto A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \tag{21}$$

Из задачи 4 видно, что второй член (19) принимает значения в $\mathrm{Lie}(SU(2))$, следовательно, область значений A_μ должна включать в себя алгебру Ли. Первый член $\omega A_\mu \omega^{-1}$ - тоже элемент алгебры Ли, поскольку $\omega(x)$ действует в данном случае по присоединенному представлению.

Таким образом, *поле Янга-Миллса* A_μ - это калибровочное поле со значениями в алгебре Ли $SU(2)$, преобразующееся по закону (19). Одно из отличий полученного объекта от электродинамического вектор-потенциала A_μ заключается в том, что он меняется при глобальных преобразованиях.

Так как мы ввели в нашу модель еще одно поле, необходимо добавить в лагранжиан (16) отвечающий за него член. Это можно сделать по аналогии с электродинамикой, где эту же роль выполняет свертка тензоров напряженности $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Там содержится слагаемое вида $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, которое в нашем случае преобразуются по присоединенному представлению ω. Таким образом, этого же нужно потребовать от искомого тензора калибровочного поля[2]:

$$F_{\mu\nu} \longmapsto (F_{\mu\nu})' = \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1} \tag{22}$$

Задача 6. *Показать, что при этом требовании* $\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ *будет калибровочным инвариантом.*

С учетом этих требований удобным оказывается следующий вид тензора поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = -ig\frac{\sigma^a}{2}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu) \tag{23}$$

Второе равенство - это разложение по базису $\mathrm{Lie}(SU(2))$, а g - так называемая калибровочная константа связи.

Задача 7. *Покажите, что тензор поля Янга-Миллса (21) изменяется по закону (20).*

Теперь из этого тензора можно построить калибровочно-инвариантный лагранжиан свободного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu} \tag{24}$$

В этом лагранжиане содержатся члены 3 и 4 порядка по A_μ, что делает соответствующие ему уравнения нелинейными.

Окончательный лагранжиан для взаимодействия скалярного поля с полем Янга-Миллса:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \phi^\ddagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\ddagger \phi)} \tag{25}$$

[2] Обратим внимание: несмотря на то, что здесь объекты обозначаются по аналогии с электродинамикой, они от них, разумеется, отличаются. В частности, в каждой ячейке $||F_{\mu\nu}||$ содержится матрица, и $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ - это, соответственно, тоже матрица.

Механизм Хиггса

Рассмотрим задачу о спектре частиц поля вблизи т.н. вакуума - состояния с минимальной энергией. Для этого раскладываем потенциал вблизи вакуума до квадратичных членов и сравнивая получившийся лагранжиан с стандартными выражениями, делаем вывод о спектре частиц. В качестве конкретного примера рассмотрим т.н. модель Хиггса в теории Янга-Миллса, описываемую лагранжианом (23) с потенциалом ($\lambda > 0$)

$$V(\phi^{\ddagger}, \phi) = \lambda(\phi^{\ddagger}\phi - v^2)^2 \tag{26}$$

Энергия такой модели запишется следующим образом:

$$E = \int \mathrm{d}^3\, x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3\, x \left[\frac{1}{2} F^a_{0i} F^{0i}_a + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a + \mathcal{D}_0 \phi^{\ddagger} \mathcal{D}_0 \phi + \mathcal{D}_i \phi^{\ddagger} \mathcal{D}^i \phi + V(\phi^{\ddagger}, \phi)\right] \tag{27}$$

Минимум энергии достигается при постоянном значении ϕ, соответствующем минимуму потенциала. Условие на минимум в модели (27) задает трехмерную сферу в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Чтобы разложить потенциал вблизи вакуума, нам нужно выбрать одну из точек этой сферы, что соответствует *спонтанному нарушению симметрии.*

Зафиксируем т.н. унитарную калибровку: оказывается, преобразованиями из $SU(2)$ всегда можно привести потенциал ϕ к виду $\phi = (\phi_1, 0)^T$, где ϕ_1 - вещественнозначная функция. Вакуумное состояние ϕ_0 можно выбрать в виде $\phi_0 = (v, 0)^T$ и работать с $\phi = (v + \chi, 0)^T$.
Теперь нам нужно оставить в лагранжиане только члены, квадратичные по полям χ и A_μ. Для этого рассмотрим, как будет выглядеть ковариантная производная и тензор поля в линейном приближении, а потенциал - в квадратичном:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \frac{ie}{2} A^a_\mu \sigma_a \phi_0 + O(A^2_\mu, \chi^2) = \begin{pmatrix} \partial_\mu \chi + iev A^3_\mu/2 \\ -ev(A^2_\mu - iA^1_\mu)/2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + O(A^2_\mu) \tag{29}$$

$$V(\phi^{\ddagger}, \phi) = \lambda(\phi^{\ddagger}\phi - v^2)^2 = \lambda((v + \varphi_1)^2 - v^2) = 4\lambda\varphi_1^2 v^2 + O(\chi^3) \tag{30}$$

Задача 8. *Убедитесь в справедливости разложений (28)-(30).*

Таким образом, в квадратичном порядке имеем следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu} + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{4} e^2 v^2 A^a_\mu A^\mu_a - 4\lambda\chi^2 v^2 \tag{31}$$

Видно, что вблизи основного состояния лагранжиан разложился на несколько простых слагаемых: 3 векторных поля A^a_μ массой $M = ev/\sqrt{2}$ каждое и скалярное поле χ массой $2v\sqrt{\lambda}$.

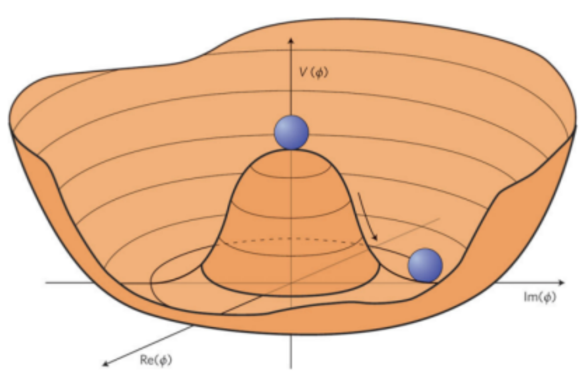

Рис. 1: В теории U(1) для разложения вблизи вакуума нужно выбрать одну из точек окружности.

Теория в присоединенном представлении

Материальное поле ϕ связано с калибровочным полем A_μ с помощью ковариантной производной (19), которая вторым действует на первое. Так как A_μ является элементом алгебры Ли, то необходимо задать его представление (и, соответственно, определить тем самым пространство, в котором живет материальное поле). Выше мы полагали, что это представление - фундаментальное. Рассмотрим также и присоединенное (то есть когда ϕ будет принимать значения в алгебре Ли калибровочной группы). [3] Выберем антиэрмитовы генераторы $SU(2)$ в виде $T_a = i\sigma_a$. Для них справедливы коммутационные соотношения и нормировка:

$$[T_a, T_b] = -2\epsilon_{abc}T_c \qquad \mathrm{Tr}(T_aT_b) = -2\delta_{ab} \tag{32}$$

В этом случае ковариантная производная будет равна:

$$\mathcal{D}_\mu\Phi \equiv [\partial_\mu + T(A_\mu)]\Phi = \partial_\mu\Phi + [A_\mu, \Phi] = [\partial_\mu\Phi_c - 2\epsilon_{abc}A^a_\mu\Phi^b]T^c \tag{33}$$

Также в таком представлении можно ввести для поля Хиггса неотрицательную норму $|\Phi|^2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\Phi^2)$.

Задача 9. *Показать, что* $\mathrm{Tr}(\mathcal{D}_\mu\Phi\mathcal{D}^\mu\Phi)$ *и* $\mathrm{Tr}(\Phi^2)$ *- это калибровочные инварианты.*

Из задачи 9 следует, что калибровочно инвариантный лагранжиан можно выбрать в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{D}_\mu\Phi\mathcal{D}^\mu\Phi) - V(|\Phi|^2) \tag{34}$$

В присоединенном представлении также реализуется механизм Хиггса. Для этого рассмотрим модель (34) с потенциалом $V = m^2(1-|\Phi|^2)^2$. Видно, что его вакуумное состояние задается уравнением $|\Phi_0|^2 = 1$. Калибровочным преобразованием выберем $\Phi_0 = T_3$. Таким образом, мы можем рассматривать возмущенные поля в виде:

$$\Phi = (1+\varphi)T_3; \quad A_\mu = W^1_\mu T_1 + W^2_\mu T_2 + a_\mu T_3 \tag{35}$$

Здесь φ, W^i_μ, a_μ - малые скалярные функции. Смысл странных обозначений станет ясен дальше. Проведем разложение лагранжиана до квадратичного порядка вблизи этого вакуума:

$$\mathcal{D}_\mu\Phi \equiv \partial_\mu\Phi + [A_\mu, \Phi] = (\partial_\mu\varphi)T_3 + (1+\varphi)[T_3, W^1_\mu T_1 + W^2_\mu T_2 + a_\mu T_3] \approx (\partial_\mu\varphi)T_3 - 2W^1_\mu T_2 + 2W^2_\mu T_1$$

$$\Longrightarrow \; \mathrm{Tr}(\mathcal{D}_\mu\Phi\mathcal{D}^{\mu\prime}) \approx \mathrm{Tr}\Big[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi(T_3)^2 + 4W^1_\mu W^\mu_1(T_2)^2 + 4W^2_\mu W^\mu_2(T_1)^2\Big] = -2\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - 8W^1_\mu W^\mu_1 - 8W^2_\mu W^\mu_2$$

$$V(|\Phi|^2) \approx m^2(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(T_3)^2 + 2\varphi(T_3)^2)^2 = m^2(1-(1+2\varphi))^2 = 4m^2\varphi^2 \tag{36}$$

Разложение первого члена аналогично (29). Итого итоговый лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + 4W^1_\mu W^\mu_1 + 4W^2_\mu W^\mu_2 - 4m^2\varphi^2 \tag{37}$$

В нем видны 2 массивных векторных поля W^i_μ, безмассовое векторное поле a_μ и массивное скалярное поле φ.

Рома Гайдаров
Дима Старков

[3] Поскольку теперь наши поля - это матрицы размера 2×2, введём для них новое обозначение Φ.