Нарушение интегрируемости при квантовании в $\mathbb{CP}^N$ сигма модели.

Борис Еремин, МФТИ

5 мая 2019 г.

Постановка задачи.

Мы будем рассматривать интегрируемость в квантовом и Классическом случае на примере $O(N)$ и CP^N сигма моделей. Мы покажем, что классически эти модели имеют бесконечное число интегралов движения, однако на квантовом уровне эти законы выживают только в $O(N)$ и нарушаются в CP^N.

Когда классические законы сохранения выживают при квантовании, это предполагает факторизацию S-матрицы (только попарные рассеяния) и отсутствие рождения частиц.

Двумерные теории поля.

Классически, при наличии конформной симметрии, теория имеет бесконечное число законов сохранения. При квантовании теории, согласно операторной алгебре, эти законы сохранения могут нарушаться и будут возникать аномалии.

Рассмотрим двумерную теорию поля в координатах светового конуса:

$$s = \frac{1}{2}(x^0 + x^1), \qquad t = \frac{1}{2}(x^0 - x^1) \tag{1}$$

В этих координатах сохранение тензора энергии-импульса означает, что $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет условиям:

$$\partial_s T_{tt} + \partial_t T_{st} = 0, \qquad \partial_t T_{ss} + \partial_s T_{ts} = 0 \tag{2}$$

След тензора энергии импульса выражается, как $T^\mu_\mu = T_{ts} = T_{st}$ и в конформной теории поля $T_{ts} = T_{st} = 0$, тогда сохранение тензора энергии-импульса означает:

$$\partial_s T_{tt} = 0, \qquad \partial_t T_{ss} = 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) в классическом случае дает нам бесконечное число законов сохранения:

$$\partial_s (T_{tt})^n = 0, \qquad \partial_t (T_{ss})^n = 0 \tag{4}$$

При квантовании конформная инвариантность нарушается и след $T_{\mu\nu}$ не равен нулю. Тогда законы сохранения (4) нарушаются, однако в некоторых теориях они могут быть записаны в виде полных производных:

$$\partial_s (T_{tt})^n = \partial_s J + \partial_t K, \qquad \partial_t (T_{ss})^n = \partial_s \tilde{J} + \partial_t \tilde{K} \tag{5}$$

Это означает модификацию законов сохранения. Теперь рассмотрим конкретные примеры таких теорий.

$O(N)$ **сигма модель.**

Рассматривается модель с действием:

$$S = \frac{1}{2\alpha} \int d^2x (\partial_\mu \vec{n})^2, \quad \vec{n} = (n_1, \ldots, n_N), \quad \vec{n}^2 = 1 \tag{6}$$

Чтобы получить уравнения движения в этой теории введем множитель Лагранжа, и перепишим лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\alpha}\left((\partial_\mu \vec{n})^2 - \omega(\vec{n}^2 - 1)\right) \tag{7}$$

Уравнения движения:

$$\partial^\mu \partial_\mu \vec{n} + \omega \vec{n} = 0 \tag{8}$$

Или в координатах светового конуса:

$$4\vec{n}_{st} = -\omega \vec{n}, \quad \omega = 4\vec{n}_s \vec{n}_t, \quad \vec{n}_{st} = -(\vec{n}_s \cdot \vec{n}_t)\vec{n} \tag{9}$$

Тензор энергии-импульса этой теории $T_{tt} = \partial_t \vec{n} \cdot \partial_t \vec{n}$, и классически : $\partial_s (\vec{n}_t \cdot \vec{n}_t)^n = 0$
При квантовании в простейшем случае $n = 2$ возникнут аномалии:

$$\partial_s (\vec{n}_t \cdot \vec{n}_t)^2 = \sum_i \gamma_i A_i \tag{10}$$

где γ_i - числа, A_i некоторые локальные поля. Из соображения равенства конформной расмерности и Лоренц-инвариантности (одинаковое количество производных по s и t в левой и правой части) мы находим все возможные операторы A (с точностью до зануляющихя на уравнениях движения $\vec{n}_{st} = -\vec{n}(\vec{n}_s, \vec{n}_t)$ и из-за условия $\vec{n}^2 = 1$.)

$$A_1 = (\vec{n}_s, \vec{n}_{tttt}), \quad A_2 = (\vec{n}_s, \vec{n}_t)(\vec{n}_t, \vec{n}_{tt}), \quad A_3 = (\vec{n}_s, \vec{n}_{tt})(\vec{n}_t, \vec{n}_t) \tag{11}$$

Используя уравнения движения, можно выразить операторы A через новые операторы B, которые являются полными проиводными и имеют туже конформную размерность и тоже число производных.

$$B_1 = \partial_s (\vec{n}_{tt}, \vec{n}_{tt}), \quad B_2 = \partial_t [(\vec{n}_s, \vec{n}_t)(\vec{n}_t, \vec{n}_t)], \quad B_3 = \partial_t (\vec{n}_{ttt}, \vec{n}_s) \tag{12}$$

Например:

$$\partial_t (\vec{n}_{ttt} \cdot \vec{n}_s) = (\vec{n}_{tttt} \cdot \vec{n}_s) + 3(\vec{n}_t \cdot \vec{n}_{tt})(\vec{n}_t \cdot \vec{n}_s) \tag{13}$$

Таким образом, мы имеем закон сохранения на квантовом уровне:

$$\partial_s (\vec{n}_t \cdot \vec{n}_t)^2 = \sum_i c_i B_i \tag{14}$$

Для $O(N)$ доказано существование бесконечного числа интегралов движения на квантовом уровне. В этой модели факторизуется S матрица и отсутсвует рождение частиц.

CP^{N-1} сигма модель.

Для начала покажем, что $\mathrm{CP}^{N-1} = S^{2N-1}/U(1)$. По определению:

$$\mathrm{CP}^{N-1} = \{\vec{n} \in (\mathbb{C}^N - 0) \mid \vec{n} \sim \lambda \vec{n}, \ \lambda \in \mathbb{C}\} \tag{15}$$

Из определения мы можем зафиксировать модуль $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_N)$:

$$\sum_{i=1}^{N} |n_i|^2 = 1 \tag{16}$$

Это уравнение задает нам S^{2N-1}, однако мы все еще можем домножить вектор на фазу $e^{i\phi} \in U(1)$. Тогда

$$\mathrm{CP}^{N-1} = S^{2N-1}/U(1) \tag{17}$$

Действие CP^{N-1} сигма модели записывается через метрику Фубини Штуди:

$$S = \frac{1}{2\alpha}\int d^2x g_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j \tag{18}$$

Чтобы упростить вычисления, мы будем рассматривать поля живущие на S^{2N-1}. Однако, аналогично случаю элетродинамики, поля эквивалентны с точностью до калибровки $n_i \sim n_i e^{i\phi}$. Чтобы это учесть мы должны добавить калибровочное поле $A_\mu \in \mathrm{Lie}\ U(1) = \mathbb{R}$ и ковариантныю производную $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$.

Тогда действие для CP^{N-1}:

$$S = \frac{1}{2\alpha}\int d^2x \left(D_\mu n_i^* D_\mu n^i\right) \tag{19}$$

Из уравнений движения для поля A_μ можно получить явное выражение для него:

$$A_\mu = \frac{i}{2}(n_i^*\partial_\mu n^i - n^i\partial_\mu n_i^*) \tag{20}$$

Уравнения движения аналогичны случаю $O(N)$ модели.

$$4D_sD_tn_i = -\omega n_i \tag{21}$$

Тензор энергии - импульса $T_{tt} = D_tn_i^*D_tn^i$, $T_{ss} = D_sn_i^*D_sn^i$ и классически $\partial_s(D_tn_i^*D_tn^i)^2 = 0$. Аналогично на квантовом уровне возникают аномалии:

$$\partial_s(D_tn_i^*D_tn^i)^2 = \sum_i \gamma_i A_i \tag{22}$$

Из аналогичных соображений существует только 4 возможные A:

$$\begin{aligned}
A_1 &= D_tD_tD_tD_tn_i^*D_sn^i + D_sn_i^*D_tD_tD_tD_tn^i,\\
A_2 &= (D_tn_i^*D_tn^i)(D_tD_tn_j^*D_sn^i + D_sn_i^*D_tD_tn^j)\\
A_3 &= (D_tD_tn_i^*D_tn^i)(D_tn_j^*D_sn^j) + (D_tn_i^*D_tD_tn^i)(D_sn_j^*D_tn^j),\\
A_4 &= (D_tD_tn_i^*D_tn^i)(D_sn_j^*D_tn^j) + (D_tn_i^*D_tD_tn^i)(D_tn_j^*D_sn^j)
\end{aligned} \tag{23}$$

В тоже время существую только 3 оператора B той же конформной размерности и являющихся полными производными:

$$\begin{aligned}
&B_1 = \partial_s(D_tD_tn_i^*D_tD_tn^i), \quad B_2 = \partial_t[(D_tn_i^*D_tn^i)(D_tn_j^*D_sn^j + D_sn_j^*D_tn^j)],\\
&B_3 = \partial_t[(D_tD_tD_tn_i^*D_sn^i) + (D_sn_i^*D_tD_tD_tn^i)]
\end{aligned} \tag{24}$$

Тогда мы не можем переписать (22) в виде полных производных и закон сохранения разрушен аномалиями.

Аналогично нарушаются остальные законы сохраниения, и интегрируемость на квантовом уровне у CP^N пропадает.

Единственное исключение - случай CP^1. Окаывается, что $\mathrm{CP}^1 = S^3/S^1 = S^2$ и это означает, что наша теория является $O(3)$ сигма моделью, которая интегрируема.

Интегрируемость общей сигма модели