«Замкнутая (периодическая) цепочка Тоды»

Содержание

1. Напоминание

1.1. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_{N+1}(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{sl}_{N+1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$E_\alpha = E_{\alpha,\alpha+1}, \quad E_{-\alpha} = E_{\alpha+1,\alpha}, \quad H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha(H_i) E_\alpha, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad [H_i, H_j] = 0$$

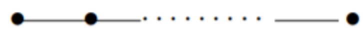

Рис. 1. Диаграмма Дынкина простых корней A_N алгебры $\mathfrak{sl}_{N+1}(\mathbb{C})$

1.2. Пара Лакса, инволютивность собственных значений, старшие потоки

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \otimes \mathbb{1} = \sum_{ij=1}^{N} \mathcal{L}_{ij} \left(E_{ij} \otimes \mathbb{1} \right), \quad \mathcal{L}_2 = \mathbb{1} \otimes \mathcal{L} = \sum_{ij=1}^{N} \mathcal{L}_{ij} \left(\mathbb{1} \otimes E_{ij} \right)$$

$$r_{12} = \sum_{ijkl} r_{ijkl} E_{ij} \otimes E_{kl}, \quad r_{21} = \sum_{ijkl} r_{ijkl} E_{kl} \otimes E_{ij}$$

$$\mathrm{Tr}_1 \, r_{12} = \sum_{ijkl} r_{ijkl} \, \mathrm{Tr} \left(E_{ij} \right) E_{kl}, \quad \mathrm{Tr}_2 \, r_{12} = \sum_{ijkl} r_{ijkl} E_{ij} \, \mathrm{Tr} \left(E_{kl} \right)$$

Утверждение 1. *Собственные значения матрицы $\mathcal{L}$ находятся в инволюции* $\Leftrightarrow \exists \, r_{12}$: $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = [r_{12}, \mathcal{L}_1] - [r_{21}, \mathcal{L}_2]$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Воспользоваться диагонализуемостью матрицы Лакса и найти явный вид матрицы r_{12}. ($\Leftarrow$) Вычислить $\mathrm{Tr}\, \{\mathcal{L}_1^m, \mathcal{L}_2^n\}$. $\square$

Утверждение 2. *Пусть* $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = [r_{12}, \mathcal{L}_1] - [r_{21}, \mathcal{L}_2]$ *и* $H_n = \dfrac{1}{n} \mathrm{Tr}\, \mathcal{L}^n$. *Тогда*

$$\partial_{t_n} \mathcal{L} \equiv \{H_n, \mathcal{L}\} = [M_n, \mathcal{L}], \quad M_n = -n \, \mathrm{Tr}_1 \left(\mathcal{L}_1^{n-1} r_{21} \right). \tag{1}$$

Доказательство. Вычислить скобку $[M_n, \mathcal{L}_2]$. $\square$

1.3. Открытая цепочка Тоды

Рассмотрим симплектическое многообразие $\left(M^{2N}, \omega \right)$ с каноническими координатами на нем $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, q_j\} = 0$. Гамильтониан и уравнения движения для открытой цепочки Тоды:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} p_i^2 + \sum_{i=1}^{N} e^{2(q_i - q_{i+1})}, \qquad \begin{cases} \dot{q}_i = p_i \quad i = \overline{1, N+1} \\ \dot{p}_1 = -2e^{2(q_1 - q_2)} \\ \dot{p}_i = -2e^{2(q_i - q_{i+1})} + 2e^{2(q_{i-1} - q_i)} \quad i = \overline{2, N} \\ \dot{p}_{N+1} = 2e^{2(q_N - q_{N+1})} \end{cases}, \tag{2}$$

или в терминах генераторов алгебры $\mathfrak{sl}_{N+1}(\mathbb{C})$:

$$q = \sum_{i=1}^{N} q_i H_i, \quad p = \sum_{i=1}^{N} p_i H_i, \quad H_i \in \mathfrak{h} \tag{3}$$

$$H = \frac{1}{2} (p, p) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} e^{2\alpha(q)}, \qquad \begin{cases} \dot{q} = \{H, q\} = p \\ \dot{p} = \{H, p\} = -2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} H_\alpha e^{2\alpha(q)} \end{cases}, \tag{4}$$

где $(\cdot, \cdot)$ – форма Картана-Килинга.

Классическая r-матрица для открытой цепочки Тоды и условие инволютивности собственных значений матрицы Лакса:

$$r_{12} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \left(E_\alpha \otimes E_{-\alpha} - E_{-\alpha} \otimes E_\alpha \right) = -r_{21} \quad \Rightarrow \quad \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = [r_{12}, \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2]. \tag{5}$$

2. Постановка задачи

2.1. Гамильтонов формализм

Рассмотрим систему из $N+1$ частицы, которая описывается с помощью канонических координат q_i, p_i со стандартной скобкой Пуассона

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \tag{6}$$

Гамильтониан физической системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N+1} p_i^2 + \sum_{i=1}^{N} e^{q_i - q_{i+1}} + e^{q_{N+1} - q_1} \tag{7}$$

и описывает систему из $N+1$ одномерной частицы с одинаковой массой, которые взаимодействуют только с соседними частицами с экспоненциальным потенциалом. При этом имеются периодические граничные условия

$$(p_0, q_0) = (p_{N+1}, q_{N+1})\,, \quad (p_{N+2}, q_{N+2}) = (p_1, q_1)\,. \tag{8}$$

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (7),

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i, \\ \dot{p}_i = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}, \end{cases} \qquad i = \overline{1, N+1}. \tag{9}$$

2.2. Аффинная алгебра Ли. Пара Лакса

Лаксову пару для открытой цепочки Тоды мы построили по конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{sl}_{N+1}$. Чтобы получить лаксово представление для замкнутой цепочки Тоды, необходимо ввести спектральный параметр λ, поэтому периодическая цепочка Тоды ассоциирована с аффинной алгеброй Ли $\hat{\mathfrak{sl}}_{N+1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_{N+1}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1})$.

Рис. 2. Диаграмма Дынкина простых корней $\hat{A}_{N+1}$ аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{sl}}_{N+1}(\mathbb{C})$

Замечание. Отметим, что под аффинной алгеброй Ли подразумевают линейное пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1}) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$, где $d\lambda^m = m\lambda^m\, n \in \mathbb{N}$, с коммутированием по правилу

$$[x\lambda^m, y\lambda^n] = [x, y]\,\lambda^{m+n} + (x, y)\, m\delta^m_{-n} K, \quad [d, x\lambda^m] = mx\lambda^m, \quad [K, \mathfrak{g}] = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_0. \tag{10}$$

Мы же выберем такое представление, в котором $K = 0$ и $d = 0$, поэтому полученная алгебра есть *алгебра петель*.

Пусть E_{ij} – канонические матрицы $(N+1)\times(N+1)$, т.е. $(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{kl}$; $E_{\alpha_i}=E_{i-1,i}$, $E_{-\alpha_i}=E_{i,i-1}$ при $i=1,\ldots,N+1$, $E_{\alpha_{N+1}}=\lambda E_{N+1,1}$, $E_{-\alpha_{N+1}}=\lambda^{-1}E_{1,N+1}$.

Обозначим

$$a_i=\begin{cases} e^{q_{i+1}-q_i}, & i=1,\ldots,N,\\ e^{q_{N+1}-q_1}, & i=N+1,\end{cases}\qquad \prod_{i=1}^{N+1}a_i=1.$$

Тогда система (9) имеет следующее представление Лакса

$$\mathcal{L}(\lambda)=\sum_{i=1}^{N+1}p_iE_{ii}+\sum_{i=1}^{N+1}a_i\left(E_{\alpha_i}+E_{-\alpha_i}\right),\quad M(\lambda)=-\sum_{i=1}^{N+1}a_i\left(E_{\alpha_i}-E_{-\alpha_i}\right),\tag{11}$$

где $q_i-q_{i+1}=\alpha_i(q)$, $q=\sum q_iE_{ii}$ – бесследная диагональная матрица, $\alpha_i(q)$ – простой корень ассоциированный с вектором $E_{i,i+1}$.

Явная запись пары Лакса:

$$\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} p_1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^{-1}a_{N+1}\\ a_1 & p_2 & a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & p_3 & a_3 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{N-2} & p_{N-1} & a_{N-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & p_N & a_N\\ \lambda a_{N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_N & p_{N+1}\end{pmatrix},$$

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^{-1}a_{N+1}\\ a_1 & 0 & -a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & -a_3 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & 0 & -a_N\\ -\lambda a_{N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_N & 0\end{pmatrix}.\tag{12}$$

Уравнения (9) эквивалентны уравнению Лакса

$$\dot{\mathcal{L}}(\lambda)=\left[M(\lambda),\mathcal{L}(\lambda)\right].\tag{13}$$

Замечание. Заметим, что гамильтониан (7) можно записать в виде

$$H=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathcal{L}^2(\lambda),$$

причем гамильтониан не зависит от спектрального параметра.

Теперь интегралами движения системы являются коэффициенты разложения $\operatorname{Tr}\mathcal{L}^m(\lambda)$ по степеням спектрального параметра, а именно

$$\operatorname{Tr}\mathcal{L}^m(\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}H_k^{(m)}\lambda^{-k-1}\quad\Rightarrow\quad H_k^{(m)}=\frac{1}{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\lambda}d\lambda\,\lambda^k\operatorname{Tr}\mathcal{L}^m(\lambda).\tag{14}$$

3. Интегралы движения

По теореме Лиувилля интегралы движения должны быть в инволюции, чтобы гамильтонова система была интегрируема, причем количество гамильтонианов равно половине числа степеней свободы системы.

Так как представление Лакса зависит от спектрального параметра, то матрицу Лакса можно раскладывать в формальный ряд по спектральному параметру, причем коэффициенты этого разложения будут являться интегралами движения системы. Остается вопрос: находятся ли эти интегралы в инволюции относительно скобки Пуассона. Чтобы ответить на него, рассмотрим r-матричную структуру периодической цепочки Тоды.

3.1. Классическая r-матрица

Рассмотрим для начала

Пример 1. $\hat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f) \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1})$.

Положительные корни: $e, e\lambda, e\lambda^2, \ldots;\ h\lambda, h\lambda^2, \ldots;\ f\lambda, f\lambda^2, \ldots$.

Отрицательные корни: $e\lambda^{-1}, e\lambda^{-2}, \ldots;\ h\lambda^{-1}, h\lambda^{-2}, \ldots;\ f, f\lambda^{-1}, f\lambda^{-2}, \ldots$.

Простые корни: $e, f\lambda$.

Воспользуемся формулой для r-матрицы для открытой цепочки Тоды:

$$2r_{12}(\lambda, \lambda') = e \otimes f \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda'} + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 + \ldots\right)}_{\text{сходится при } |\lambda|<|\lambda'|} + h \otimes h \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 + \ldots\right)}_{\text{сходится при } |\lambda|<|\lambda'|} -$$
$$- f \otimes e \underbrace{\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + \ldots\right)}_{\text{сходится при } |\lambda'|<|\lambda|} + h \otimes h \underbrace{\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + \ldots\right)}_{\text{сходится при } |\lambda'|<|\lambda|}.$$

Мы видим, что полученные ряды сходятся в разных полуплоскостях. Поэтому необходимо поправить r-матрицу на разнесенный казимир

$$r_{12}^{\pm}(\lambda, \lambda') = r_{12}(\lambda, \lambda') \pm \frac{1}{2} C_{12} = \frac{1}{2} \sum_i H_i \otimes H^i \pm \sum_{\alpha>0} E_\alpha \otimes E_{-\alpha},$$
$$C_{12} = \sum_i H_i \otimes H^i + \sum_{\alpha>0} \left(E_\alpha \otimes E_{-\alpha} + E_{-\alpha} \otimes E_\alpha\right). \quad (15)$$

Замечание. $[C_{12}, H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H] = 0, [C_{12}, E \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes E] = 0 \Rightarrow [C_{12}, \mathcal{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathcal{L}] = 0$.

Тогда при $|\lambda| < |\lambda'|$

$$r_{12}^{+}(\lambda, \lambda') = e \otimes f \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda'} + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 + \ldots\right) + h \otimes h \left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 + \ldots\right) +$$
$$f \otimes e \left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 + \ldots\right) + \frac{1}{2} h \otimes h = \frac{1}{2} \frac{\lambda' + \lambda}{\lambda' - \lambda} h \otimes h + \frac{1}{\lambda' - \lambda} \left(\lambda' e \otimes f + \lambda f \otimes e\right).$$

Окончательно

$$r_{12}^{\pm}\left(\lambda,\lambda'\right)=\frac{1}{2}\frac{\lambda'+\lambda}{\lambda'-\lambda}h\otimes h\pm\frac{1}{\lambda'-\lambda}\left(\lambda' e\otimes f+\lambda f\otimes e\right)\quad |\lambda|\lessgtr|\lambda'|. \tag{16}$$

В общем случае, учитывая опускание индекса у элементов подалгебры Картана,

$$r_{12}^{\pm}\left(\lambda,\lambda'\right)=\frac{1}{2}\frac{\lambda'+\lambda}{\lambda'-\lambda}\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii}+ \\ +\frac{1}{\lambda'-\lambda}\left(\lambda'\sum_{i<j}E_{ij}\otimes E_{ji}+\lambda\sum_{i>j}E_{ij}\otimes E_{ji}\right)\quad |\lambda|\lessgtr|\lambda'|. \tag{17}$$

Заметим, что $r_{12}^{\pm}\left(\lambda,\lambda'\right)=-r_{21}^{\pm}\left(\lambda',\lambda\right)$. Тогда

$$\{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda')\}=\left[r_{12}^{\pm}\left(\lambda,\lambda'\right),\mathcal{L}_1(\lambda)+\mathcal{L}_2(\lambda')\right]. \tag{18}$$

Используя дуальность $\operatorname{Tr}\operatorname{Res}$, определим с помощью $r_{12}^{\pm}$ два отображения $R^{\pm}$

$$M_{\pm}=-2R^{\pm}(\mathcal{L})\Rightarrow M_{\pm}=\mp\sum_i p_iH_i\mp 2\sum_i a_iE_{\pm\alpha_i}. \tag{19}$$

Тогда из выражений (12) определим

$$M(\lambda)=\frac{1}{2}\left(M_+(\lambda)+M_-(\lambda)\right),\quad \mathcal{L}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(-M_+(\lambda)+M_-(\lambda)\right),$$

и уравнение Лакса может быть записано в виде

$$\dot{\mathcal{L}}(\lambda)=\left[M_{\pm}(\lambda),\mathcal{L}(\lambda)\right].$$

3.2. Старшие потоки

Утверждение 2 полностью переносится на пару Лакса, зависящую от спектрального параметра.

Утверждение 3. *Пусть* $\{\mathcal{L}_1(\lambda),\mathcal{L}_2(\lambda')\}=\left[r_{12}^{\pm}\left(\lambda,\lambda'\right),\mathcal{L}_1(\lambda)+\mathcal{L}_2(\lambda')\right]$ *и* $H_n^{(m)}=\frac{1}{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\lambda}d\lambda\,\lambda^n\operatorname{Tr}\mathcal{L}^m\left(\lambda\right)$. *Тогда*

$$\partial_{t_n}\mathcal{L}\left(\lambda\right)\equiv\left\{H_n^{(m)},\mathcal{L}\left(\lambda\right)\right\}=\left[\left(M_n^{(m)}\right)_2\left(\lambda\right),\mathcal{L}\left(\lambda\right)\right], \\ \left(M_n^{(m)}\right)_2\left(\lambda\right)=-\frac{m}{2\pi i}\oint_{C_{\lambda'}}d\lambda'\,\lambda'^n\operatorname{Tr}_1\left(\mathcal{L}_1^{m-1}\left(\lambda'\right)r_{21}^{\pm}\left(\lambda,\lambda'\right)\right). \tag{20}$$

Доказательство. Вычислить скобку $\left[\left(M_n^{(m)}\right)_2\left(\lambda\right),\mathcal{L}_2\left(\lambda\right)\right]$. □

3.3. Спектральная кривая

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для матрицы Лакса $\mathcal{L}(\lambda)$

$$\mathcal{L}(\lambda)\,\Psi = \mu\Psi, \quad \Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{N+1})^\top, \tag{21}$$

соотвествующий характеристический многочлен

$$\det\left(\mathcal{L}(\lambda) - \mu\mathbb{1}\right) = 0.$$

Про характеристический многочлен можно думать как о спектральной кривой Γ – гладкой алгебраической кривой, определяемой уравнением

$$\Gamma(\lambda, \mu) \equiv \det\left(\mathcal{L}(\lambda) - \mu\mathbb{1}\right) = 0. \tag{22}$$

Тогда коэффициенты разложения детерминанта по μ будут являться интегралами движения. Таким образом, спектральная кривая (22) – «носитель» интегралов движения.

Раскрывая детерминант, запишем (22) в виде

$$\Gamma(\lambda, \mu) \equiv \lambda + \lambda^{-1} - 2P_{N+1}(\mu), \tag{23}$$

где $2P_{N+1}(\mu) = \mu^{N+1} - \sum_{i=1}^{N+1} p_i\mu^{N+1} + \ldots$ – полином степени $N+1$ по μ. или

$$s^2 = P_{N+1}^2(\mu) - 1 = \tilde{P}_{2N+2}(\mu), \quad s = \lambda - P_{N+1}(\mu). \tag{24}$$

Замечание. Если многочлен $P_{N+1}^2(\mu)$ имел кратные корни, то многочлен $\tilde{P}_{2N+2}(\mu)$ уже не имеет кратных корней, т.е.

$$\tilde{P}_{2N+2}(\mu) = \prod_{i=1}^{2N+2}(\mu - \mu_i) \quad \mu_i \neq \mu_j \quad \forall\, i, j = \overline{1, 2N+2}. \tag{25}$$

Вычислим род спектральной кривой. Если он совпадает с количеством степеней свободы заданной системы, то имеется нужное количество интегралов движения. Тогда мы можем перейти в новые канонические координаты, в которых рассматриваемая система будет намного проще.

Отметим, что спектральная кривая Γ – гиперэллиптическая кривая. В нашем случае ее алгебраической род совпадает с топологическим родом римановой поверхности, которую она определяет.

Рассмотрим произвольное N-листное разветвленное накрытие сферы Римана компактной связной поверхностью Римана $\mathcal{R}$

$$f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{C}} \quad (\lambda, \mu) \mapsto \mu. \tag{26}$$

Воспользуемся эйлеровой характеристикой $\chi = F - E + V = 2 - 2g$, где g – род римановой поверхности. Зная f и характеристику Эйлера сферы Римана $\chi_0 = 8 - 12 + 6 = 2$, можно восстановить характеристику Эйлера χ римановой поверхности $\mathcal{R}$.

Действительно, рассмотрим следующую триангуляцию сферы Римана: пусть под действием голоморфного отображения f каждая точка ветвления римановой поверхности попадает в вершину триангуляции сферы Римана. Тогда $f^{-1}(F) = NF$, $f^{-1}(E) = NE$, $f^{-1}(V) = NV - B$, где B – количество точек ветвления (вообще говоря, с учетом их индекса, но в нашем случае каждая точка ветвления будет иметь индекс равный единице).

$$\chi(\mathcal{R}) = N\chi_0 - B. \tag{27}$$

Построим компактную связную риманову поверхность, определяемую (24), которая есть двулистное накрытие сферы Римана:

$$\mathcal{R} = \underbrace{\mathbb{C} \setminus \{\mu_1, \ldots, \mu_{2N+2}\}}_{\text{локальная координата } \mu} \quad \cup \quad \underbrace{\{\mu_1, \ldots, \mu_{2N+2}\}}_{\text{локальная координата } \lambda,\, \mu \mapsto (\mu-\mu_i)^{-1}} \quad \cup \quad \underbrace{\{\infty\}}_{\text{локальные координаты } u=1/\mu, v=\lambda/\mu}$$

Найдем количество точек ветвления.

- нули многочлена $\tilde{P}_{2N+2}(\mu)$, т.е. $2N + 2$ точки ветвления.
- бесконечность не является точкой ветвления (видно, если сделать замену координат $u = 1/\mu, v = \lambda/\mu$):
$$u^2 = \prod_{i=1}^{2N+2} (1 - \mu_i v),$$
т.е. $v = 0$ не является корнем многочлена в правой части.

Тогда

$$\chi(\mathcal{R}) = 2\chi_0 - (2N + 2) = 2 - 2N = 2 - 2g \quad \Rightarrow \quad g = N. \tag{28}$$

Список литературы

[1] O. Babelon и др. *Introduction to classical integrable systems.* Cambridge University Press, 2003.

[2] S. Kass и др. *Affine Lie algebras, weight multiplicities, and branching rules.* University of California Press, 1990.

[3] Б. А. Дубровин. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения.* Регуляр. и хаот. динамика, 2001.

[4] Б. А. Дубровин и др. Интегрируемые системы 1. *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*, 4(0):179—277, 1985.