Аффинный грассманиан

1 Разложение Брюа. Конечномерная ситуация

Пусть G — связная редуктивная группа над $\mathbb{C}$. Можно считать ее простой. Можно вообще считать ее $GL_n(\mathbb{C})$.

Теорема 1 (Разложение Брюа). $G = \sqcup_{w\in W} BwB$

Замечание 1. W не вложено в G, аккуратнее брать представителей $N(T)/T$.

Замечание 2. Это тоже самое, что орбиты B на $\mathrm{Fl} = G/B$. Эти орбиты называются клетками Шуберта.

Разложение Брюа для $GL_n(\mathbb{C})$. Это тоже самое, что орбиты G на $G/B \times G/B$. Два флага могут находится в относительной позиции $w \in W$. Это эквивалетно выбору общего тора у $T \subset B \cap B'$. □

Теорема 2 (Бялыницкий-Бируля). *а) Пусть есть действие $S \simeq \mathbb{C}^*$ на гладком комплексном многообразии X с изолированными особыми точками X^S. Тогда*

$$X = \sqcup_{p\in X^S} X_p \quad X_p = \{x \in X | \lim_{z\to 0} S(z) \cdot x = p\}.$$

Многообразия X_p являются аффинными пространствами.

б) Если многообразие X^S не является изолированным и состоит из каких-то компонент связность, то есть объединение по связным компонентам X^S

$$X = \sqcup_{C\subset X^S} X_P \quad X_C = \{x \in X | \lim_{z\to 0} S(z) \cdot x \in C\},$$

и многообразия X_C являются тотальными пространства аффинных расслоений на C.

Возьмем (кохарактер) подгруппу соответствующую $-\rho^\vee$. Для случая GL_n это просто $\mathrm{diag}(z, z^2, \ldots, z^n)$. Тогда неподвижные точки на Fl есть W, к ним стягиваются подространства X_w которые есть клетки. При этом B орбиты будут стягиваться в одно и тоже. Правда из этого рассуждения непонятно почему клетки это чисто B орбиты.

Замечание 3. С точки зрения действия на пространстве флагов можно брать орбиты другой борелевской B'. Есть у B' будет тот же тор T, то надо реализовать W как $N(T)/T$ и тогда $G = \sqcup_{w\in W} B'wB$.

В частности для противоположной Борелевской B_- имеем $G = B_- wB$. Для GL_n это разложение Гаусса. Действуя на строки сделаем матрицу такой, чтобы слева было нулей как можно больше. Тогда все строки будут начинаться с разного числа нулей и значит матрица будем лежать в wB.

Замечание 4. Нам еще понадобится случай параболической группы (это подгруппа содержащая борелевскую, для группы GL_n это блочные верхнетреугольные матрицы). Для нее имеем $G = \sqcup_{w\in W/W_L} PwB$, где L — подгруппа Леви в P. Также имеем $G = \sqcup_{w\in W_L\backslash W/W_L} PwP$, где L — подгруппа Леви в P.

Пример 5. Многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(k,n) = GL_n/P$. Клетки Шуберта нумеруются k элементными подмножествами в $1,\ldots,n$. Это $S_n/(S_k\times S_{n-k})$, в частности их количество равно $\binom{n}{k}$.

2 Аффинный Грассманиан

Пусть $K = \mathbb{C}((t)) = \mathbb{C}[[t]$ — поле рядов Лорана, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$ — кольцо рядов Тейлора. Далее все время $G = GL_n$. Λ^+ обозначает полугруппу доминантных кохарактеров, ее можно отождествить с множеством $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Каждому $\lambda \in \Lambda^+$ соответствует элемент $t^\lambda = \mathrm{diag}(t_1^\lambda,\ldots,t_n^\lambda) \in G(K)$.

Теорема 3. *Есть разложение Картана* $G(K) = \sqcup_{\lambda\in\Lambda^+} G(\mathcal{O})t^\lambda G(\mathcal{O})$

Замечание 6. $G(\mathcal{O})$ — это параболичесая подгруппа. Множество Λ^+ — это $W\backslash W^a/W$, где W^a — аффинная группа Вейля. Напомним, что $W^a = W \ltimes \Lambda$.

Замечание 7. В качестве аналогии можно держать разложение Картана $GL_n(\mathbb{R}) = KAK$, где $K = O_n$ — компактная подгруппа, A — диагональные матрицы с положительными коэффициентам.

Теорема эквивалентна утверждению об орбитах в аффинном грассманиане $\mathrm{Gr}_G = G(K)/G(\mathcal{O})$. Геометрически этот аффинный грассман можно представлять себе следующим образом. Пусть $V = \mathbb{C}^n$, зафиксируем базис $e_1,\ldots,e_n$. Тогда

$$\mathrm{Gr}_G = \{L \subset V(K) | L \text{ — свободный } \mathcal{O}\text{-модуль ранга } n.\}$$

Такие L называются решетками. Теперь докажем теорему.

Доказательство. Есть выделенная L_0 порожденная $e_1,\ldots,e_n$. Стабилизатор решетки L_0 в $G(K)$ это $G(\mathcal{O})$. Теорема утверждает, что любую решетку можно преобразованиями из $G(\mathcal{O})$ можно привести к виду $t^\lambda L_0$.

Это проверятся непосредственно. Пусть какая-то решетка порождена векторами $v_1,\ldots,v_n$. Тогда, можно делая замены переменных сделать так, что v_n содержит минимальную степень t который вообще встречается в L. Тогда действуя $G(\mathcal{O})$ можно привести v_n к виду $e_n t^{\lambda_n}$. Далее, выбираем v_{n-1} с минимальной степенью t среди всех базисных векторов не кратных v_n и приводимо его действием $G(\mathcal{O})$ к виду $e_{n-1}t^{\lambda_{n-1}}$ и так далее. $\square$

Для любого $\lambda \in \Lambda^+$ обозначим через Gr_G^λ соответствующую клетку Шуберта. Ее замыкание тоже является $G(\mathcal{O})$ инвариантным и поэтому состоит из орбит Gr_G^μ. Легко видеть, что $\overline{\mathrm{Gr}_G^\lambda} = \sqcup_{\mu \le \lambda} \mathrm{Gr}_G^\mu$, это следует из того, что степень зануления не может подскочить, может только уменьшиться.

Замечание 8. Аффинный грассманиан является индуктивных пределом проективных многообразий. А именно, рассмотрим

$$\mathrm{Gr}_G^N = \{L \in \mathrm{Gr}_G | t^N L_0 \subset L \subset t^{-N} L_0\}$$

Для любого $L \in \mathrm{Gr}_G^N$ фактор $L/t^N L_0$ лежит в $2N$ подпространстве $V \otimes \mathbb{C}[t]/t^{2N}$ и инварианте относительно умножения на t. Таким образом Gr_G^N разбивается на несколько связных компонент лежащих в $\mathrm{Gr}(k, nN)$.

Понятно, что Gr_G^N является $G(\mathcal{O})$ инвариантным, из этого в частности следует, что он разбивается в объедиение каких-то Gr_G^λ. Многообразия Gr_G^N вообще говоря являются не гладкими.

Пример 9. Пусть $n = 2$, $N = 1$. То есть мы ищем инвариантные относительно умножения на t подпространства в пространстве с базисом e_1, e_2, te_1, te_2, $t^2 = 0$. В типичном таком подпространстве можно выбрать базис в виде

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

где $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, (β_1, β_2) определены с точностью до прибавления α_1, α_2, т.е лежат в факторе $\mathbb{C}^2/(\alpha_1, \alpha_2)$.

Координаты Плюккера на таком подмножестве имеют вид

$$z_{12} = 0, z_{13} = \alpha_1^2, z_{14} = \alpha_1\alpha_2, z_{24} = \alpha_2^2, z_{23} = \alpha_1\alpha_2, z_{34} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

В замыкании у нас получится подмногообразие в проективном пространстве заданное уравнениями $z_{12} = 0$, $z_{23} = z_{14}$, $z_{13}z_{24} = z_{23}^2$. Оно является особым около точки $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$. Эта точка соответствует подмногообразию L_0, мы получили объединение двух клеток $\mathrm{Gr}_{GL_2}^{(0,0)} \cup \mathrm{Gr}_{GL_2}^{(1,-1)}$.

Вообще, если мы хотим получить замыкание клетки $\mathrm{Gr}_{GL_2}^\lambda$ надо рассмотреть подпространства $t^{\lambda_1} L_0 \subset L \subset t^{\lambda_2} L_0$, такие, что $\dim(L/t^{\lambda_2} L_0) = \lambda_1 - \lambda_2$. Это и будет $\overline{\mathrm{Gr}_{GL_2}^\lambda}$.

Рассмотрим подгруппу $S \simeq \mathbb{C}^*$ которая действуем на $G(K)$ растягивая t: $g(t) \to g(tz)$.

Предложение 4. $(\mathrm{Gr}_G)^S = \sqcup_{\lambda \in \Lambda^+} G t^\lambda$.

Доказательство. Легко следует из решеток. □

Если же рассмотреть больший тор $T \times S$, то его неподвижные точки это уже будут t^λ. Достаточно было даже взять просто тор T, его неподвижные точки это t^λ. (Это морально связано с тем, что $T(K)/T(\mathcal{O}) = \{t^\lambda\}$).

Предложение 5. Gr_G^λ *является многообразием размерности* $(2\rho, \lambda) = \sum \lambda_i(n+1-2i)$.

Доказательство. По теореме Бялыницкий-Бируля примененной клетка Gr_G^λ является аффинным расслоением на Gr^λ. Касательное пространство к орбите есть фактор алгебры Ли по подалгебре Ли стабилизатора элемента. В нашем случае алгебра Ли имеет вид $\mathfrak{g}(\mathcal{O}) = \mathfrak{h}(\mathcal{O}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha(\mathcal{O})$. Подалгебра имеет вид $\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \cap t^{-\lambda}\mathfrak{g}(\mathcal{O})t^\lambda$, где $t^{-\lambda}\mathfrak{g}(\mathcal{O})t^\lambda = \mathfrak{h}(\mathcal{O}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} t^{(\alpha,\lambda)}\mathfrak{g}_\alpha(\mathcal{O})$. Так как $\lambda \in \Lambda^+$, то размерность фактора равна $\sum_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\lambda) = (2\rho,\lambda)$. В нашем случае положительные корни это $\epsilon_i - \epsilon_j$, $i < j$, они сдвигаются на $\lambda_1 - \lambda_j$, таким образом размерность равна $\sum \lambda_i(n+1-2i)$. $\square$

Если хотеть разбить Gr_G^λ на клетки, то надо взять больший тор, т.е. разбить сначала $Gt^\lambda = G/P_\lambda$ на клетки. В примере выше $\mathrm{Gr}_{GL_2}^{(1,-1)}$ оказалось пространством расслоения $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{CP}^1$.

Предложение 6. $x \in \overline{\mathrm{Gr}_G^\lambda} \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} S(z)x \in \overline{\mathrm{Gr}_G^\lambda}$

Доказательство. Очевидно, что если $x \in \mathrm{Gr}_G^\lambda$, то $\lim_{z\to 0} S(z)x \in \overline{\mathrm{Gr}_G^\lambda}$. Наоборот, если $\lim_{z\to 0} S(z)x \in \mathrm{Gr}^\mu \in \overline{\mathrm{Gr}_G^\lambda}$, то $x \in \mathrm{Gr}_G^\mu \subset \overline{\mathrm{Gr}_G^\lambda}$. $\square$

3 Коконечномерные клетки Шуберта

Теперь мы будем использовать другое разложение.

Теорема 7. *Есть разложение Бирктофа* $G(K) = \sqcup_{\lambda\in\Lambda^+} G(\mathbb{C}[t^{-1}])t^\lambda G(\mathcal{O})$

Замечание 10. Опишем геометрический смысл этого разложения. Удобно рассмотреть сначала $/G(\mathbb{C}[t^{-1}])\backslash G(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])/G(\mathbb{C}[t])$, т.е. перейти от рядов Лорана к полиномам Лорана. Элемент $g(t) \in G(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ является функцией на $\mathbb{C}^*$ со значениями в G, то есть функцией на переклейки голоморфного расслоения на $\mathbb{CP}^1$. Умножения с одной стороны на $G(\mathbb{C}[t^{-1}])$, а с другой стороны на $G(\mathbb{C}[t])$ отвечают за смену тривиализации на двух картах. Теорема говорит, что $g(t)$ можно привести к виду t^λ, то есть расслоение изоморфно прямой сумме линейных $\mathcal{O}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(\lambda_n)$. Это и есть описание расслоений на $\mathbb{CP}^1$.

Связь между $G(K)$ и $G(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ происходит при помощи изоморфизма

$$G(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])/G(\mathbb{C}[t]) \simeq G(K)/G(\mathcal{O}).$$

поэтому все честно. Геометрический смысл этого изоморфизма в следующем. Многообразие $G(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ — это многобращие пар $(\mathcal{E}_D, \sigma)$, где $\mathcal{E}_D$ — это расслоение на $\mathbb{CP}^1$ и σ

тривалиазация на $\mathbb{CP}^1 \setminus 0$. С другой стороны Gr_G — это пары $(\mathcal{E}, \sigma_D)$, где $\mathcal{E}$ — это расслоение на формальном диске D и σ_D формальном проколотом диске $D \setminus 0$. Изоморфизм выше означает, что расслоение на D с тривиализацией на $D \setminus 0$ можно продолжить на все $\mathbb{CP}^1$ с тривиализацией на $\mathbb{CP}^1 \setminus 0$

Обозначим через $W_\mu = G(\mathbb{C}[t^{-1}])_1 t^\mu G(\mathcal{O}) \subset \mathrm{Gr}_G$, где $G(\mathbb{C}[t^{-1}])_1 \in G(\mathbb{C}[t^{-1}])$ — подгруппа элементов стремящихся к единице при $t \to \infty$. Эта группа является "дополнительной"к группе $G(\mathcal{O})$. W_μ имеют конечную коразмерность, у нас нарушена симметрия между двумя противоположными Борелевскими подгруппами.

Предложение 8. $x \in W_\mu \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} S(z)x = t^\mu G(\mathcal{O})$

Доказательство. В одну сторону, если $x \in W_\mu$ это очевидно. Наоборот, пусть x удовлетворяет этому свойству предела. Тогда, по разложению Биркгофа $x \in G(\mathbb{C}[t^{-1}])_1 g t^\nu G(\mathcal{O})$ для какого-то $\nu \in \Lambda^+$, $g \in G$. Тогда $\lim_{z\to\infty} S(z)x = gt^\nu G(\mathcal{O})$. Значит, $gt^\nu = t^\mu$, ч.т.д. □

Определим трансверсальный срез $\overline{W}^\lambda_\mu = W_\mu \cap \overline{\mathrm{Gr}^\lambda_G}$. Он ненулевой только при $\mu \leq \lambda$.

Следствие 9. $\overline{W}^\lambda_\mu = \{x \in \mathrm{Gr}_G | \lim_{z\to 0} S(z)x \in \overline{\mathrm{Gr}^\lambda_G}, \lim_{z\to 0} S(z)x = t^\mu\}$.

Можно было брать μ не доминантные, тогда получилось бы то же самое. (просто подействовать G) Можно доказать, что $\dim_\mathbb{C} \overline{W}^\lambda_\mu = (2\rho, \lambda - \mu)$, это будет следовать из их описания как колчанных многообразий на следующей лекции.

Пример 11. Пусть $G = GL_2$. Без ограничения общности можно взять $\lambda = (N, 0)$. Тогда любое подпространство $L \in \mathrm{Gr}^\lambda_G$ лежит $t^N L_0 \subset L \subset L_0$, то есть можно считать, что порождено $v_1 = A(t)e_1 + B(t)e_2$, $v_1 = C(t)e_1 + D(t)e_2$, где полиномы A, B, C, D имеют степень не более N. Более того. можно выбрать базис так, что $AD - BC = z^N$.

Возьмем $\mu = (N - m, m)$, можно считать, что $N - m \geq m$. Тогда условие $L \in W_\mu$ означает, что можно выбрать v_1, v_2 так, что $D(t) = t^m + \ldots$, $\deg B, \deg C < m$. Такие наборы многочленов задаются просто парой многочленов C, D, т.е. $2m$ коэффициентами. Действительно многочлены C, D взаимно просты, и тогда многочлен B определяется из условия $BC \equiv -t^N \pmod{D}$. После этого A уже определяется однозначно.

Заметим, еще, что эти многообразия A, B, C, D определены даже если $m < N/2$. Это не трансверсальные срезы, но тоже что-то интересное.

Замечание 12. На трансверсальных срезах есть Пуассонова структура. Она происходит из обычной r-матричной структуры на $G(K)$.

Эти многообразия являются какими-то Кулоновскими ветками.