1. Предположим, что группу можно представить в виде объединения двух подгрупп. Докажите, что одна из этих подгрупп совпадает со всей группой.

2. Найдите σ^{2011}, где σ — следующая перестановка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Сколько перестановок из n элементов могут быть представлены в виде произведения двух (несовпадающих) транспозиций?

4. Сколько автоморфизмов у группы $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

5. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

6. Чему равно произведение попарных разностей корней степени n из 1?

7. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

(1) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;
(2) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;
(3) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

8. Найдите минимальный многочлен квадратной $n \times n$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & a_3 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

9. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

10. Пусть A и B — подмножества в $\mathbb{R}$. Докажите, что подмножество $A \times B$ в $\mathbb{R}^2$ замкнуто тогда и только тогда, когда оба подмножества A и B замкнуты.

11. Пусть C — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует такая последовательность $x_n \in C$, что любую точку множества C можно получить в качестве частичного предела этой последовательности.

12. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *собственным*, если прообраз относительно f всякого компактного множества компактен. Докажите, что любой комплексный многочлен f, рассматриваемый как отображение плоскости комплексных чисел в себя, является собственным отображением.

13. (a) Существует ли непрерывное отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такое, что $f(\mathbb{R}^2) = [0, 1]$, и множество $f^{-1}(x)$ ограниченно для любого $x \in [0, 1]$?

(b) Тот же вопрос при дополнительном предположении, что f монотонно, то есть прообраз всякого связного множества связен.

14. Пусть пространство X получается из двумерного тора склеиванием двух точек в одну. Найдите фундаментальную группу пространства X.

15. Пусть A — множество в $\mathbb{R}^3$, являющееся объединением оси z, единичной окружности в плоскости x, y и точки $(3, 3, 0)$. Докажите, что фундаментальная группа множества $\mathbb{R}^3 - A$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Z}$.

16. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ с точностью до 0,01. Дайте строгое обоснование того, что ответ получен с заданной точностью.

17. Докажите, что

$$\limsup_{n \to \infty} \sin(nx) = 1.$$

для почти всех x по мере Лебега.

18. Докажите, что всякую непрерывно дифференцируемую функцию на числовой прямой можно представить в виде разности двух непрерывных строго возрастающих функций.

19. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Докажите, что существует такое число $t \in [0, 1]$, что

$$\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx.$$

20. Пусть A и B — матрицы $n \times n$. Найдите смешанную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$ матрично-значной функции $f(x, y) = \exp(xA + yB)$ при $x = y = 0$. (Производные функций со значениями в матрицах определяются точно так же, как производные числовых функций).

21. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема почти всюду (в смысле меры Лебега), и почти всюду $f'(x) = 1$. Следует ли отсюда, что $f(1) - f(0) = 1$? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

22. Вычислите интеграл

$$\int \max(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

по кубу $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

23. Пусть $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Вычислите интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-q(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n.$$

24. Рассмотрим функцию f, голоморфную в единичном диске $|z| \leq 1$. Докажите, что

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{|z|=1} f(z)\log(z)dz,$$

где в левой части интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[0, 1]$, а в правой — по единичной окружности с направлением обхода против часовой стрелки (делается только один обход, начинающийся в 1). Выбирается ветвь логарифма, действительная на положительной полуоси действительной прямой.

25. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

26. Пусть $f \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени ≥ 2. Докажите, что сумма вычетов 1-формы $dz/f(z)$ по всем комплексным нулям многочлена f равна нулю. Верно ли это утверждение, если f имеет степень 1?

27. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

28. Пусть f_1, f_2, f_3, $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — четыре многочлена степени 2 на плоскости (не обязательно однородных). Докажите, что если четыре точки A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^2$ лежат на одной прямой, то определитель матрицы $(f_i(A_j))$, $i, j = 1, \ldots, 4$, равен нулю.

29. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых нечетна?

30. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11?$$

31. Баскетболист Косоруков собирается выполнить серию из 100 бросков по кольцу. При первом броске он всегда попадает, при втором — всегда промахивается, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках из этой серии. Какова вероятность того, что он попадет ровно 50 раз?

32. Найдите максимальное возможное число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника.

33. Можно ли на плоскости расположить окружность и параболу таким образом, чтобы их пересечение состояло ровно из двух точек, причем в одной окружность касалась бы параболы, а в другой — нет?

34. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все окружности на плоскости (рассматриваемые локально, вблизи точек с невертикальными касательными, как графики функций от одной переменной).

35. Найдите систему уравнений

$$\ddot{r} = f(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}), \quad \ddot{\phi} = g(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$$

в полярных координатах, решения которой в декартовых координатах (x, y) имеют вид $x = at + b$, $y = ct + d$, где a, b, c, d — произвольные числа, не зависящие от t.

36. Найдите производную решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.

37. Найти какое-нибудь нетривиальное (т.е. зависящее как от x, так и от t) решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 2u^3 - u.$$

То же для уравнения

$$u_t = -u^2 u_x + u_{xxx}$$

38. Решить уравнение

$$u_t = -u^2 u_x$$

с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$. Найти максимальное значение t такое, что неособое решение существует на всем полуинтервале $[0, t)$.

39. Определите частоты нормальных колебаний системы двух массивных грузиков, движущихся на отрезке прямой и скрепленных пружинами с концами отрезка и между собой (всего три пружины). Решите задачу для произвольных (положительных) значений масс грузиков и коэффициентов жесткости пружин.

40. Определите частоты нормальных колебаний для цепочки из n частиц одинаковой массы m, движущихся на отрезке прямой и скрепленных с концами отрезка и между собой пружинами с одинаковым коэффициентом жесткости k (всего $n + 1$ пружина).

41. К середине натянутой горизонтально струны подвешивают грузик, под тяжестью которого струна провисает на величину δ, много меньшую своей длины. Определите частоту малых гармонических колебаний грузика, полагая, что сила натяжения струны пропорциональна ее растяжению, и что до подвешивания грузика

а) струна была натянута с некоторой силой;
б) струна не испытывала натяжения.

42. Грузик массы m на двух пружинах жесткости k подвешивается между вертикальными стенками. В исходном положении обе пружины ориентированы горизонтально и не испытывают натяжения, грузик находится на расстоянии ℓ от каждой из стен. В начальный момент времени грузику придается скорость v_0 в вертикальном направлении. Определите зависимость скорости грузика от его положения.