Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Факультет математики

Ильина Анна Васильевна

Интегрируемые системы и линейные операторы, связанные с двухточечными функциями Бейкера–Ахиезера

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Кричевер Игорь Моисеевич

Москва — 2020

Оглавление

Введение

Современный подход к спектральной теории периодических дифференциальных и разностных операторов был вызван успехами метода обратной задачи рассеяния. В 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши с быстроубывающими начальными данными для уравнения КдФ. В последствии это привело к создание нового метода математической физики — метода обратной задачи рассеяния. В 1968г. Лакс [2] обобщил этот метод и открыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры: уравнение КдФ эквивалентно так называемому представлению Лакса. В 1971г. Захаров и Шабат [3] решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера. В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [4]. Естественным образом возник вопрос, как решать нелинейные уравнения подобные КдФ для периодических начальных данных.

Схема интегрирования уравнения КдФ с быстроубывающими начальными данными сводилась к решению прямой задачи, простой эволюции спектральных данных и решению обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на прямой. Подобная схема оказалась нереализуемой для уравнения КдФ с периодическими начальными данными, ввиду того, что недостаточно эффективным были решены как прямая, так и обратная задачи.

В пионерской работе Новикова [5] был выделен класс потенциалов, являющихся аналогами многосолитонных решений в быстроубывающем случае. Задачей нахождения полного и эффективного описания вещественных конечнозонных потенциалов для одномерного оператора Штурма–Лиувилля независимо друг от друга занимались Дубровин [6], Матвеев и Итс [7]. Много позже в работе [8] показано, что множество конечнозонных периодических потенциалов плотно в пространстве функций с данным периодом. Эффективизация спектральной теории оператора Штурма–Лиувилля (см. работы [5], [9],[10],[11], [12], [13], [14]) позволила решить периодическую задачу для уравнения КдФ. Впоследствии, полученные результаты были расширены и на такие фундаментальные уравнения математической физики как уравнение синус–Гордона, нелинейное уравнение Шредингера и пр.

Ключевым шагом в развитии современной спектральной теории периодических операторов стало понимание факта (ныне кажущегося самоочевидным), что блоховские функции — решения периодической задачи Штурма–Лиувилля, собственные для оператора монодромии, — являются значениями одной функции на различных листах некоторой римановой поверхности, которая в общем случае может не быть гладкой и конечного рода. Вышесказанное оказалось верным и для многочисленных примеров одномерных линейных операторов с периодическими коэффициентам. Такая кривая впоследствии стала называться *спектральной кривой.* Роль аналитических свойств блоховских функций на этой кривой прояснилась в работах Кричевера [15], [16], где была предложена алгебро–геометрическая конструкция решений уравнений математической физики, ключевым элементом которой являлось понятие функции Бейкера–Ахиезера.

Среди элементарных функций комплексного аргумента экспонента e^z является следующей по сложности после рациональных функций. Она аналитична в $\mathbb{C}$ и имеет существенную особенность в точке $z = \infty$. Если $q(z)$ рациональная, тогда $e^{q(z)}$ аналитичная в $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением полюсов $q(z)$. Клебш и Гордон придумали обобщить функции экспоненциального типа на римановы поверхности старшего рода. В том случае, когда род строго больше нуля, в отличии от обычных экспонент такие функции обязаны иметь полюса. Бейкер заметил, что для таких обобщений экспонент могут быть получены простые формулы в терминах тэта–функций соответствующих римановых поверхностей. *Функцией Бейкера–Ахиезера* называется функция с заданной экспоненциальной особенностью, единственным образом определяемая своими аналитическими свойствами. Впервые в работе [17] было отмечено, что при некоторых условиях функции экпоненциального типа на гиперэллиптических поверхностях являются собственными некоторых линейных дифференциальных операторов второго порядка. Важнейшим наблюдением Кричевера было то, что эти аналитические свойства гарантируют, что функции Бейкера–Ахиезера являются собственными для широкого семейства линейных операторов.

Первоначально, схема интегрирования Кричевера нелинейных уравнений с помощью функции Бейкера–Ахиезера представляла собой решение обратной задачи (т.е. по кривой и некоторому алгебро–геометрическому набору условий восстанавливался оператор), при этом без решения прямой задачи (в частности, задачи построения спектральной кривой) оставался неясным класс общности полученных операторов. Кроме того, было совершенно не понятно, что такое спектральная кривая в случае двумерных периодических операторов. Связь конструкции Кричевера со спектральной теорией двумерных периодических операторов была получена в работе [18], связанной с периодических нестационарным оператором Шредингера $\partial_y - \partial_x^2 + u(x,y)$, где впервые было предложено понятие кривой Блоха–Флоке и предпринята попытка построить обобщение спектральной кривой для двумерных операторов. Такая теория оказалась значительно сложнее спектральной теории одномерных периодических операторов, поскольку в одномерии соответствующая спектральная кривая определяется характеристическим уравнением конечномерной матрицы монодромии, а в двумерии соответствующие операторы являются бесконечномерными и придать смысл характеристическому уравнению — сложная и не всегда решаемая задача.

Настоящая работа состоит из двух глав, объединенных общей идеей — идеей использования современного подхода к спектральной теории периодических операторов и одного из его основных понятий — двухточечной функции Бейкера–Ахиезера (дискретной и непрерывной).

В Главе 1 спектральная теория треугольных разностных операторов (см. [19]) применяется к построение гамильтоновой теории систем, полученных некоторой редукцией иерархии двумеризованной цепочки Тода. Так непосредственно будет использоваться одно из основных достижений спектральной теории периодических операторов — утверждение о том, что нелинейные уравнения, имеющие представление Лакса (см. работу [20],[21]), являются гамильтоновыми.

В 1967 Тода определил в [22] одномерную решеточную механическую систему в физике твердого тела с экспоненциальным взаимодействием, называемую в настоящее время цепочкой Тода:

$$\begin{cases} \frac{dp_i(t)}{dt} = e^{q_{i-1}(t)-q_i(t)} - e^{q_i(t)-q_{i+1}(t)} \\ \frac{dq_i(t)}{dt} = p_i(t) \end{cases},$$

здесь $q_i(t)$ отклонение i-ой частицы от своего положения равновесия, $p_i(t)$ ее импульс. В работе [23] была получена пара Лакса для уравнений движения, что позволило построить N–солитонные решения [24], первые интегралы [25],[26], метод обратной задачи рассеяния и теорию конечнозонного интегрирования периодической задачи [27],[28], [29]. В работе [30] были построены переменные действие–угол для периодического случая.

Двумерный аналог уравнения цепочки Тода был предложен Михайловым (см. [31], [32])

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_1^+ \partial t_1^-} = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-1} - \varphi_i}. \tag{0.0.1}$$

Аналогично случаю уравнения Кадомцева–Петвиашвили, уравнение (0.0.1) включается в бесконечную цепочку уравнений, называемую *иерархией двумеризованной цепочки Тода*. Существует как минимум четыре подхода к описанию данной иерархии.

Первоначально такая иерархия задавалась в форме системы уравнений Захарова–Шабата

$$\begin{cases} \frac{\partial L_m^+}{\partial t_{m'}^+} - \frac{\partial L_{m'}^+}{\partial t_m^+} + [L_m^+, L_{m'}^+] = 0 \\ \frac{\partial L_m^-}{\partial t_{m'}^-} - \frac{\partial L_{m'}^-}{\partial t_m^-} + [L_m^-, L_{m'}^-] = 0 \\ \frac{\partial L_m^-}{\partial t_{m'}^+} - \frac{\partial L_{m'}^+}{\partial t_m^-} + [L_{m'}^+, L_m^-] = 0, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

где

$$L_m^- = T^{-m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,m}^{j,-} T^{-j}, \;\; L_m^+ = \sum_{j=1}^{m} a_{i,m}^{m,-} T^j. \tag{0.0.3}$$

Если рассмотреть $L_1^+ = u_0^+ T$ и $L_1^- = T^{-1} + u_1$, тогда из уравнений Захарова-Шабата (0.0.2) можно получить уравнение (0.0.1), введя параметризацию $u_1^-(i) = \partial_{t_1^-}\varphi_i$, $u_0^+(i) = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}}$. Хотя каждое из уравнений (0.0.2) это корректно определенная система на конечное число неизвестных функций, в совокупности вся иерархия задана как система бесконечного числа уравнений на бесконечное число неизвестных. Задача построения алгебро–геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода была решена в работе [33].

Иерархия двумеризованной цепочки Тода также имеет форму динамических уравнений (представление типа Лакса) на пространстве двух псевдоразностных операторов $\mathcal{L}_\pm$ (т.е. на бесконечном пространстве коэффициентов данных операторов):

$$\begin{cases} \partial_{t_m^+}\mathcal{L}_+ = \left[L_m^+, \mathcal{L}_+\right], \;\; \partial_{t_m^-}\mathcal{L}_+ = \left[L_m^-, \mathcal{L}_+\right] \\ \partial_{t_m^+}\mathcal{L}_- = \left[L_m^+, \mathcal{L}_-\right], \;\; \partial_{t_m^-}\mathcal{L}_- = [L_m^-, \mathcal{L}_-], \end{cases} \tag{0.0.4}$$

где
$$\begin{cases}\mathcal{L}_- = T^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^- T^{j-1}\\ \mathcal{L}_+ = u_0^+ T + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^+ T^{1-j},\end{cases} \tag{0.0.5}$$
и
$$L_m^- := \left(\mathcal{L}_-^m\right)_{\le 0},\ L_m^+ := \left(\mathcal{L}_+^m\right)_{>0}. \tag{0.0.6}$$
Здесь $\mathcal{A}_{\ge 0}$ и $\mathcal{A}_{<0}$ соответственно неотрицательная часть и отрицательная части псевдодифференциального оператора $\mathcal{A}$. В работе Уено и Такасаки [34] доказана эквивалентность системы (0.0.2) уравнениям Лакса (0.0.4).

В настоящей работе предлагается использование следующего эквивалентного подхода к построению данной иерархии (см. [35]), а именно как к системе уравнений на пространстве коэффициентов $\{\psi_\pm(i)\}$ набора формальных рядов вида

$$\psi_-(i) = z_-^i(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^-(i)z_-^s),\ \psi_+(i) = z_+^{-i}e^{\varphi_i}(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^+(i)z_+^s).$$

Для этого необходимо определить единственным образом операторы вида (0.0.3) уравнениями

$$L_m^-\psi_-(i) = z_-^{-m}\psi^-(i) + O(z)\psi^-(i),\ L_m^+\psi_+(i) = z_+^{-m}\psi^+(i) + O(1)\psi^+(i)$$

и динамику на коэффициенты $\xi_s^\pm(i)$ как

$$\begin{cases}\left(\partial_{t_m^-} - L_m^-\right)\psi_- = -z_-^{-m}\psi_-,\ \left(\partial_{t_m^-} - L_m^-\right)\psi_+ = 0,\\ \left(\partial_{t_m^+} - L_m^+\right)\psi_+ = -z_+^{-m}\psi_+,\ \left(\partial_{t_m^+} - L_m^+\right)\psi_- = 0.\end{cases}$$

Коммутативность построенных потоков $\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm$ очевидна.

Стоит добавить, что кроме системы уравнений Захарова–Шабата, уравнений Лакса (0.0.4) и подхода, используемого в работе Кричевера и Варченко, иерархия 2D Тоды может быть переформулирована как система билинейных уравнений в форме Хироты на одну единственную $\tau(s,t^\pm)$–функцию. Для $\tau(s,t^\pm)$ имеет место формула в терминах фермионов (см. [36],[37],[38]).

Основным типом редукций, рассматривавшихся в теории иерархии КП, являются редукции на стационарные точки одного из потоков иерархии (или линейной комбинации таких потоков). Соответствующие инвариантные подмногообразия имеют конечную функциональную размерность и отвечают псевдодифференциальным операторам, т.ч. их n–я степень является дифференциальным оператором. В случае разностных уравнений задача поиска таких редукций становится намного труднее. Пусть выполнено
$$\begin{cases}L\psi_- = z_-^{-k-1}\psi_-\\ L\psi_+ = z_+\psi_+,\end{cases} \tag{0.0.7}$$
где $L = L_{k+1}^-$ периодический оператор. Из второго условия (0.0.7) следует, что L становится строго нижнетреугольным, и, кроме того, от уравнений (0.0.2) можно

перейти к уравнениям Лакса

$$\left[\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm, L\right] = 0. \tag{0.0.8}$$

Уравнения (0.0.8) могут рассматриваться как уравнения на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$ n–периодических строго нижнетреугольных операторов L порядка $k+1$. А для того, чтобы объяснить их гамильтоновость, необходимо дать определения спектральной кривой и дискретной двухточечной функции Бейкера–Ахиезера. Ограничим строго нижнетреугольный периодический оператор L порядка $k+1$ на пространство квазипериодических решений, т.е. $L(w) := L|_{\{\psi | w\psi_{i+n}=\psi_i\}}$. Тогда существуют два формальных ряда $\psi_\pm$, т.ч.

Лемма 0.0.1. *[54] Для любого оператор $L(w)$, т.ч. n и $k+1$ взаимно просты, существует единственный ряд*

$$E(z_-) = z_-^{-k-1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} e_s z_-^s\right), \tag{0.0.9}$$

т.ч. уравнение $L(w)\psi_- = E\psi_-$ имеет единственное решение вида

$$\psi_-(i) = z_-^i\big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^-(i) z_-^s\big),\ \xi_s^-(i) = \xi_s^-(i+n),\ \xi_s^-(0) = 0.$$

Лемма 0.0.2. *[54] Уравнение $L(w)\psi_+ = E\psi_+$ имеет единственное формальное решение вида*

$$\psi_+(i) = e^{\varphi_i} z_+^{-i}\big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(i) z_+^s\big),\ a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}},\ \xi_s^+(0) = 0.$$

Каждой точке спектральной кривой Γ (имеющей две отмеченные точки $p_\pm$), задающейся уравнением

$$\det(E - L(w)) = w^{k+1} - E^n + \sum_{i>0, j\geq 0, ni+(k+1)j<n(k+1)} r_{ij} w^i E^j = 0,$$

можно сопоставить собственный вектор $\psi(p) = \big(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\big)^t$ для $L(w)$. Поведение в точках $p_\pm$ дается в двух предыдущих леммах, и можно доказать, что число полюсов блоховского вектора $\psi(p)$, где $p = (w, E) \in \Gamma$ равно роду кривой Γ, тем самым, отметим, что $\psi(p)$ является в сущности двухточечной функцией Бейкера–Ахиезера. Кроме того, очевидно, что значения $\psi(p)$ в отмеченных точках $p_\pm$ есть частный случай $\psi_\pm$ и, следовательно, по ψ можно построить операторы $L_m^\pm$. Отсюда слеует, что система (0.0.8) есть конечномерная система на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$ n–периодических строго нижнетреугольных операторов порядка $k+1$, если $(n, k+1) = 1$.

Гамильтоново понимание природы нелинейных уравнений (в частности КдФ), имеющих представление Лакса, возникло позже метода обратной задачи рассеяния.

В работе [39] Захарова—Фаддеева 1971 года было доказано, что КдФ это гамильтонова система. Многим позже Магри [40] в работе 1978 года показал, что КдФ гамильтоново с другим гамильтонианом и другой скобкой Пуассона. Так возникло понимание, что уравнения могут быть би—гамильтоновыми. Это замечательно тем, что позволяет строить некоторой процедурой интегралы движения, находящиеся в инволюции.

Следуя работам Кричевера и Фонга (см. [20] и [21]) на пространстве периодических операторов, отождествленном с фазовым пространством системы, существует семейство два–форм

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha} E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L(w)\wedge\delta\psi(w)\rangle\,d\Omega,\ i\in\mathbb{N}. \tag{0.0.10}$$

Сумма в последней формуле берется по таким точкам p_α на соответствующей спектральной кривой Γ, где правая часть имеет полюс *a–priori*: 1) в отмеченных точках $p_\pm$, где функция Бейкера–Ахиезера и ей двойственная имеют полюса; 2) в нулях p_ℓ, $\ell = 1,\ldots,k$ функции $E = E(p)$, где $w = w(p)$ не зануляется, т.е. $E(p_\ell) = 0$, при $w(p_\ell) \neq 0$. В силу общих принципов (см. [21]), подстановка векторного поля, заданного уравнением Лакса, в эти формы есть точная форма. В том случае, когда формы невырождены, это означает, что уравнения гамильтоновы. До появления работ Кричевера и Фонга данное утверждение непосредственным образом проверялось для каждого уравнения, кроме того переменные действие–угол вычислялись не эффективным громоздким образом. Вместе с тем реализация этой схемы это сложная техническая задача, решение которой зависит от исходного вида пространства операторов.

Используя приведенную выше схему, мы докажем, что векторные поля $\partial_{t^\pm_m}$, определенные уравненями Лакса (0.0.8) на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$, и ограниченные на некоторые подмногообразия Λ^c_i, $i = 0,1$ являются гамильтоновыми по отношению к формам $\omega^{(i)}$ и явным образом вычислим гамильтонианы. Подмногообразия Λ^c_i, $i = 0,1$ определяются следующими Леммами

Лемма 0.0.3. *Форма $\omega^{(0)}$ невырождена на подмногообразии*

$$\Lambda^c_0 := \{L|\, e_s(L) = c_s, s = 1,\ldots k\}$$

Здесь e_s из Леммы 0.0.1, c_s константы.

Лемма 0.0.4. *Форма $\omega^{(1)}$ невырождена на подмногообразии*

$$\Lambda^c_1 := \{L|\, r_{i,0}(L) = c_i, 1 = 1,\ldots k\},$$

где $c = (c_1,\ldots,c_k)$ константы, $r_{i,0}(L) = r_{i,0}$ коэффициенты $\det L(w) = w^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} r_{i,0}w^i$.

Дополнительно изучается вопрос поиска координат, в которых формы $\omega^{(i)}$, $i = 1,2$ принимают *локальный вид*, поскольку естественные координаты (коэффициенты оператора) на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$ таковыми не являются (см. Теорему 1.1.2 и Лемму

1.1.9). Кроме того, рассматривается вопрос написания симплектической структуры на пространстве суперпериодических строго нижнетреугольных операторов $\mathcal{E}_{k+1,n}$ порядка $k+1$ (а именно, случая $k=1$). Здесь $\mathcal{E}_{k+1,n}$ пространство n–периодических операторов порядка $k+1$, действующих на функцию дискретного аргумента по правилу

$$L'\psi'_i = \psi'_{i-k-1} + a_i^k \psi'_{i-k} + \dots a_i^1 \psi'_{i-1}, \ a_{i+n}^j = a_i^j \tag{0.0.11}$$

и таких, что все решения задачи $L\psi'_i \equiv -\psi'_i$ являются n–(анти)периодическими функциями, т.е.

$$\psi'_{i+n} = (-1)^{n+k}\psi'_i. \tag{0.0.12}$$

Пространство $\mathcal{E}_{k+1,n}$ естественным образом возникает в теории кластерных алгебр (см. [41]), теории представлений (см. [42]) и теории пентаграммного отображения (см. [43], [44]). Для последнего ранее установлено, что оно сохраняет некоторую естественную структуру пуассонова многообразия на пространстве n–периодических нижнетреугольных операторов порядка 3, и построен полный набор интегралов движения в инволюции, так же доказана алгебро-геометрическая интегрируемость пентаграммного отображения.

Глава 2 посвящена построению спектральной теории двумерного периодического оператора Шредингера и обобщению хорошо известной конструкции Веселова–Новикова.

Исторически, для двумерного оператора Шредингера первоначально решалась обратная задача восстановления оператора по алгебро–геометрическим данным, а потом уже строилась спектральная теория. В работе [45] Дубровин, Кричевер и Новиков предложили конструкцию, позволяющую строить двумерный оператор Шредингера с магнитным полем

$$(i\partial_x + A_1(x,y))^2 + (i\partial_y + A_2(x,y))^2 + u(x,y). \tag{0.0.13}$$

Так по неособой алгебраической кривой $\mathscr{T}$ рода g, двум точкам $P_\pm$, локальным параметрам $k_\pm^{-1}$ в окрестностях $P_\pm$, дивизору D степени g общего положения, строилась двухточечная функция Бейкера–Ахиезера с заданными экспоненциальными особенностями в $P_\pm$, являющаяся собственной на нулевом уровне энергии для оператора (0.0.13). Стоит отметить, полученное магнитное поле имело нулевой поток.

В двух работах Веселова и Новикова 1984 года (см. [46], [47]) указаны условия на алгебро–геометрические данные предыдущей конструкции, выделяющие потенциальные операторы Шредингера

$$\mathcal{H} = -\Delta + u(x,y), \ \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2. \tag{0.0.14}$$

Было доказано, что если кроме условий работы [45] выполняются условия: 1) наличия на $\mathscr{T}$ инволюции σ со свойством $\sigma(P_\pm) = P_\pm$; 2) преобразования локальных координат по правилу $k_\pm^{-1}(\sigma(p)) = -k_\pm^{-1}(p)$; 3) существования дифференциала $d\Omega$ с нулями в дивизоре $D + \sigma(D)$ и простыми полюсами в точках $P_\pm$, тогда оператор вида (0.0.14) однозначно восстанавливается по этому алгебро–геометрическому набору данных и потенциал имеет вид второй логарифмической производной тэта–функции многообразия Прима накрытия $\mathscr{T} \to \mathscr{T}_0 = \mathscr{T}/\sigma$. Достаточное условие того, что $u(x,y)$ вещественный потенциал, — наличие антиинволюции τ, коммутирующей с σ, и т.ч. $\tau(P_\pm) = P_\mp$, $\tau^*(k_\pm^{-1}) = \bar{k}_\mp^{-1}$, $\tau(D) = D$. Кроме того, имеют место два типа условий на спектральные данные, отвечающие за неособость $u(x,y)$: 1) $\mathscr{T}$ должна быть M–кривой, причем для $g+1$ неподвижных овалов выполнялось бы свойство $\sigma(a_{j+g_0}) = \tilde{a}_j, j = \overline{1, g_0}$, $g_0 =$ род $\mathscr{T}/\sigma$; 2) антиинволюция $\sigma\tau$ разделяющего типа, и дифференциал $d\Omega$ положителен на неподвижных овалах относительно некоторой зафиксированной ориентации. В работах Натанзона [48], [49], [50] с помощью формул Веселова–Новикова выделяются вещественные торы, не пересекающие θ–дивизор (что означает несингулярность и вещественность потенциала). Отметим, что приведенные выше условия вещественности и несингулярности являются двумя крайними случаями того, что предложено Натанзоном.

Значение условий Веселова–Новикова прояснилась при решении прямой спектральной задачи в работе [51].

Определение 0.0.1. Если $\mathcal{H}$ — двумерный дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами, тогда *функция Блоха–Флоке* ϕ — решение уравнения

$$\mathcal{H}\phi(x,y,p) = \lambda\phi, \tag{0.0.15}$$

при сдвиге на период преобразующееся как

$$\begin{cases} \phi(x + 2\pi\ell_1, y) = w_1\phi(x,y) \\ \phi(x, y + 2\pi\ell_2) = w_2\phi(x,y), \end{cases} \tag{0.0.16}$$

где $2\pi\ell_1,\ 2\pi\ell_2$ — периоды, $w_1,\ w_2$ — так называемые блоховские множители.

Определение 0.0.2. *Комплексной кривой Ферми двумерного периодического оператора* $\mathcal{H}$, *соответстсвующей уровню энергии* λ, называется риманова поверхность $\Gamma_\lambda^F(\mathcal{H})$, параметризующая решения Блоха–Флоке.

Определение 0.0.3. Множество пар $(w_1, w_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$, для которых существует нетривиальное решение Блоха–Флоке уравнения (0.0.15) с соответствующими блоховскими множителями, называется *множеством Блоха–Флоке* (обозначается как $\Gamma_\lambda^{BF}(\mathcal{H})$).

Отметим, что кривая Ферми является частичной нормализацией кривой Блоха–Флоке, т.е. существует голоморфное вне сингулярных точек множества Блоха–Флоке отображение кривой Ферми в множество Блоха–Флоке. Для потенциалов общего положения понятия ферми-кривой и спектральной кривой Блоха-Флоке совпадают. Для операторов определенного вида: $\Delta + \ldots$, $\partial_y - \partial_x^2 + \ldots$ (здесь многоточием обозначены младшие члены по производным) из теоремы Келдыша Таймановым доказано, что имеет место аналитическое соотношение $R(\lambda, w_1, w_2) = 0$ (см. историю вопроса в [51] и [52]). К сожалению, такой подход не дает описания кривой, потому особую важность имеет конструктивый подход работы [51], позволяющий в том числе установить некоторые конкретные ее свойства.

Опишем этот подход: 1) потенциал $u(x,y)$ представляется в виде суммы постоянныого члена λ и некоторого возмущения $v(x,y)$, т.е. $u(x,y) = -\lambda + v(x,y)$; 2) с помошью теории возмущений строится формально блоховское решение из решений невозмущенного уравнения; 3) доказывается сходимость в областях, в последствии склеивающихся в глобальную риманову поверхность; 4) доказывается изоморфность полученной кривой и кривой Ферми. В том случае, когда построенная кривая имеет конечный род, то соответствующий периодический потенциал называется *конечнозонным.* На спектральной кривой в силу самосопряженности оператора Шредингера в общем случае существует голоморфная инволюция σ

$$\sigma: \ (w_1, w_2) \to (w_1^{-1}, w_2^{-1})$$

и, если потенциал вещественный, антиголоморфная инволюция τ

$$\tau: \ (w_1, w_2) \to (\bar{w}_1, \bar{w}_2),$$

коммутирующая с $\sigma : \sigma\tau = \tau\sigma$, оставляющая инвариантным дивизор полюсов Блоховского решения. Кроме того, если потенциал конечнозонный, то существуют две отмеченные точки $P_{\pm}$, неподвижные относительно σ, в окрестности которых формально блоховское решение имеет разложение двухточечной функции Бейкера–Ахиезера. Таким образом, полученные в работе [51] результаты дают необходимость условий Веселова–Новикова.

Спектральная теория двумерного периодического оператора Шредингера до настоящего дня построена не в полной мере. В отличии от нестационарного оператора Шредингера $\partial_y - \partial_x^2 + u(x, y)$ с гладким вещественным периодическим потенциалом спектральная кривая для $\mathcal{H}$ с гладким и вещественным периодическим потенциалом может иметь особые точки. Вопросы для периодического оператора (0.0.14) о типах особенностей остаются открытыми.

Цель Главы 2 настоящей диссертаци — прояснить некоторые вопросы спектральной теории двумерного оператора Шредингера. В случае, когда $\lambda < 0$ (случай *положительных потенциалов*), приведена конструкция, позволяющая упростить описание кривой Ферми в терминах некоторого набора данных $\mathcal{P}$ (см. Определение 2.1.2). Показано, что спектральная кривая двумерного оператора Шредингера, соответствующая положительным потенциалам, является M–кривой относительно антиинволюции τ ввиду того, что антиголоморфная инволюция $\tau\sigma$ не имеет неподвижных точек. Кроме того установлено, что полюса блоховской функции расположены по одному на каждом из неподвижных овалов τ. Отметим, что таким образом спектральная кривая двумерного периодического оператора Шредингера с положительным потенциалом необходимо и достаточно является M–кривой. Показано, что приведенная конструкция остается топологически устойчивой при деформации потенциала $u(x, y)$, оставляющей потенциал положительным, до момента прохождения точки спектра, т.е. когда кривая становится сингулярной. Одним из важнейших результатов данной работы является обобщенная конструкция Веселова–Новикова, позволяющая строить такие операторы, для которых нулевой уровень — собственный уровень периодической задачи.

Обратная задача никогда не решается при помощи сингулярной кривой (как было сказано выше, кривая Ферми может быть сингулярной). Вместо этого функция Бейкера–Ахиезера определяется на ее нормализации. В отличии от обычной конструкции Веселова–Новикова, в предложенной в Главе 2 обобщенной конструкции Веселова–Новикова используется кривая с инволюцией, имеющей $n+1$–пару неподвижных точек $(P_\pm, p^1_\pm, \dots p^n_\pm)$ для произвольного $n > 0$. В этом случае функция Бейкера–Ахиезера определяется дивизором полюсов степени $g + n$, аналитическим поведением в окрестности „бесконечностей“ и дополнительно n условиями „склейки“ в точках $p^i_\pm$. В работе найдены формулы для функции Бейкера–Ахиезера и соответсвующего потенциала двумерного потенциального оператора Шредингера в терминах подходящей тэта–функции Прима.

Приведен пример обобщенной конструкции Веселова–Новикова для случая гиперэллиптических кривых. Выбрав специальным образом разбиение точек ветвления на пары, можно добиться того, что матрица Прима П это удвоенная матрица b–периодов П = 2B. Тогда формулы для значений функции Бейкера–Ахиезера в точках склейки будут иметь крайне простой вид. Кроме того, построенные таким образом операторы Шредингера будут иметь n собственных функций. А ввиду того, что гиперэллиптическая кривая обладает свойством существования функции с полюсом порядка 2 в одной точке, получен определенный тип *условий самосогласования.* Стоит пояснить, что суть условий самосогласования в некоторой, не обязательно квадратичной зависимости потенциала от решения уравнения, следующей из существования на кривой мероморфной функции с некотором набором условий на полюса. Кроме того, доказано, что система уравнений Шредингера, связанная с этим условием самосогласования, является Лагранжевой, т.е. приведен явный вид для Лагранжиана, для которого уравнения Эйлера–Лагранжа будут совпадать с исходными уравнениями.

Список основных результатов

Теорема 0.0.1. *[60] Векторное поле $\partial_{t_m^{\pm}}$, определенное уравнением Лакса (0.0.8) и ограниченное на подмногообразие Λ_i^c является гамильтоновым для $i = 0, 1$ по отношении к формам $\widehat{\omega}^{(i)} = \omega^{(i)}\big|_{\Lambda_i^c}$ с гамильтонианами*

$$H^{(0)}_{t_m^-} = res_{p_-} z_-^{-m} E(z_-)\, d\ln z_- = e_{m+k+1} \qquad (0.0.17)$$

$$H^{(1)}_{t_m^-} = res_{p_-} z_-^{-m} \ln E(z_-)\, d\ln z \qquad (0.0.18)$$

где $E(z_-)$ ряд (0.0.9) с коэффициентами, определенными в Лемме 0.0.1, и

$$H^{(i)}_{t_m^+} = \frac{1}{n} res_0 E^{-m-i} \ln w(E) dE, \quad i = 0, 1 \qquad (0.0.19)$$

и $w(E)$ определен в (1.1.8)

Вышесказанные результаты относятся к случаю, когда L строго нижнетреугольный оператор произвольного порядка. В случае нижнетреугольной динамики

$$\partial_{t_m^-} L = [L, L_m^-], \qquad (0.0.20)$$

если ввести обозначения $(L_1^-\psi)_i = v_i\psi_i + \psi_{i-1}$, $(L\psi)_i = a_i^1\psi_{i-1} + \ldots + a_i^k\psi_{i-k} + \psi_{i-k-1}$ и $v_i = \partial_{t_1^-}\varphi_i$, уравнения (0.0.23) эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \partial_{t_1^-} a_i^1 = a_i^1(v_i - v_{i-j}) \\ \partial_{t_1^-} a_i^j = a_i^j(v_i - v_{i-j}) + a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}, \ j = \overline{2, k} \\ a_{i-1}^k - a_i^k = v_{i-k-1} - v_i. \end{cases} \qquad (0.0.21)$$

на функции a_i^j. В частности, если L имеет порядок 2, то уравнение (0.0.21) принимают простую форму

$$\partial_{t_1^-}\varphi_{i-1} - \partial_{t_1^-}\varphi_{i+1} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - e^{\varphi_{i+1} - \varphi_i}, \qquad (0.0.22)$$

и верна теорема

Теорема 0.0.2. *[60] Пусть $\mathscr{L}_2 = \{a_i T^{-1} + T^{-2} \mid a_{i+n} = a_i\}$ пространство периодических разностных строго нижнетреугольных операторов порядка 2.*

1. *Уравнение $\partial_{t_1^-} L = [L, L_1^-]$ на пространстве $\mathscr{L}_2$, ограниченном на Λ_0^c, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме $\widehat{\omega}^{(0)} = \langle dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle$, где $a_i = x_i - x_{i-2} + e_1$, с соответствующим гамильтонианом*

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = \frac{1}{n}\langle x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle + \frac{e_1}{n}\langle x_i(x_{i+1} - x_i)\rangle.$$

2. *Уравнение $\partial_{t_1^-} L = [L, L_1^-]$ на пространстве $\mathscr{L}_2$, ограниченном на Λ_1^c, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме $\widehat{\omega}^{(1)} = \langle d\varphi_i \wedge d\varphi_{i+1}\rangle$,*

где $a_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$, с соответствующим гамильтонианом

$$H^1_{\partial_{t_1^-}} = \langle e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \rangle.$$

Теорема 0.0.3. *[60] Уравнение $\partial_{t_1^-} L = [L, L_1^-]$ в случае $k = 2$ на пространстве $\mathscr{L}_3$, ограниченном на Λ_0^c, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме*

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \langle\, dy_i \wedge (dx_{i-1} - dx_{i+2}) + d(x_{i-1}x_{i-2}) \wedge dx_i + e_1 dx_i \wedge dx_{i-1} \rangle,$$

с соответствующим гамильтонианом

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = \frac{1}{n}\langle\, y_{i-1}(y_i - y_{i-3}) \rangle + \frac{1}{n}\langle x_i x_{i-1} x_{i-2}(x_{i-1} - x_i) \rangle + \frac{e_1}{n}\langle (x_i^2 (x_{i-1} - x_{i+1}) \rangle$$

$$+ \frac{e_2}{n}\langle x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \rangle + \frac{1}{n}\langle y_i (x_{i+2}^2 - x_{i-1}^2 - x_{i+2}x_{i+1} + x_{i-2}x_{i-1}) \rangle.$$

Теорема 0.0.4. *[60] Уравнение*

$$\partial_{t_m^-} L = [L, L_m^-], \tag{0.0.23}$$

ограниченное на листы с зафиксированным w_ℓ, являются гамильтоновыми по отношению к форме

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2}\langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i \rangle - \langle (-1)^{(i-1)k} e^{\varphi_{i-1}} \sum_{j=1}^{k} da_i^{(j)} \wedge |\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}| \rangle, \tag{0.0.24}$$

где $\phi_i^\ell = \psi_i(p_\ell)$ значения функции Бейкера–Ахиезера в прообразах $E = 0$ там, где $w \neq 0$, $p_\ell = (w_\ell, 0)$, $a_i^{(j)} = (-1)^{ik+1} e^{\varphi_i} |\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|$, и $e^{-\varphi_i} := (-1)^{ik} |\phi_{i-1}, \ldots, \ldots, \phi_{i-k}|$. Соответствующий гамильтониан равен

$$H^1_{\partial_{t_1^-}} = \langle a_i^{(k)} \rangle$$

Для частного случая верхнетреугольной динамики доказано

Теорема 0.0.5. *[60] Уравнение*

$$\partial_{t_1^+} L = [L, L_1^+], \tag{0.0.25}$$

ограниченное на листы с зафиксированным w_ℓ, являются гамильтоновыми по отношению к форме (0.0.24). Соответствующие гамильтониан

$$H_{\partial_{t_1^+}} = \frac{1}{n} res_{E=0} \ln w(E) E^{-2} dE = w_1 = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} \rangle,$$

где w_1 первый коэффициент разложения функции w в окрестности точки p_+.

Теорема 0.0.6. *[61] Для любого вещественного положительного периодического потенциала $u(x, y) > 0$, аналитически продолжимого в окрестность вещественных*

x, y, блоховские решения уравнения $(-\Delta+\lambda+v)\tilde{\phi}=0$ параметризуются точками римановой поверхности $\Gamma(\mathcal{P})$ для некоторого допустимого набора $\mathcal{P}$ (см. Определение 2.1.2). Соответствующая функция $\tilde{\phi}$ мероморфна и имеет по одному простому полюсу на каждом из циклов a_s.

Теорема 0.0.7. *[61] Функция Бейкера–Ахиезера двумерного оператора Шредингера имеет вид*

$$\phi(x,y,p)=\frac{\theta(A(p)+zU_++\bar{z}U_-+Z|\Pi)\theta(Z|\Pi)}{\theta(zU_++\bar{z}U_-+Z|\Pi)\theta(A(p)+Z|\Pi)}e^{z\Omega_+(p)+\bar{z}\Omega_-(p)}, \tag{0.0.26}$$

где координаты векторов $U_+, U_-\in\mathbb{C}^{g_0+n}$ даются формулой

$$U^j_\pm=\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j}d\Omega_\pm$$

При этом

$$Z=-\sum_{s=1}^{g+n}A(\gamma_s)+\mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ постоянный вектор.

Теорема 0.0.8. *[61] Функция Бейкера-Ахиезера ϕ, заданная формулой (0.0.26), где Z произвольный вектор общего положения, удовлетворяет двумерному уравнению Шредингера $\mathcal{H}\phi=0$ с потенциалом*

$$u(x,y)=-2\Delta\ln\theta(zU_++\bar{z}U_-+Z|\Pi)+E,\quad E:=4\frac{d\Omega_-}{d(k_+^{-1})}(P_+).$$

Если для некоторых целочисленных векторов N_1, N_2 и M_1, M_2 имеют место равенства

$$2\pi\ell_1(U_++U_-)=N^a+\Pi N^b,\quad 2\pi i\ell_2(U_+-U_-)=M^a+\Pi M^b$$

то функция $u(x,y)$ является $(2\pi\ell_1, 2\pi\ell_2)$-периодической, а значения функции Бейкера–Ахиезера в точках $p^i_\pm$ $\phi_i:=\phi(x,y,p^\pm_i)$ являются собственными для оператора $-\Delta+u(x,y)$ в пространстве (анти)периодических функций.

Теорема 0.0.9. *[61] Предположим, что $\mathscr{T}$ является M-кривой, антиголоморфная инволюция которой имеет неподвижные овалы $a_0, a_1,\dots,a_{g_0+n}, \tilde{a}_1,\dots\tilde{a}_{g_0}$ на которые голоморфная инволюция действует как*

$$\sigma(a_i)=\tilde{a}_i,\quad \sigma(b_i)=\tilde{b}_i,\ i=1,\dots,g_0$$

и

$$\sigma(a_{i'})=-a_{i'},\quad \sigma(b_{i'})=-b_{i'},\ i'=\overline{g_0+1,g_0+n}.$$

Предположим также, что $p^i_\pm\in a_{g_0+i}$. Тогда, если точки γ_s допустимого дивизора D степени $g+n$ лежат по одной на каждом из овалов $a_1\dots,a_{g_0}, \tilde{a}_1\dots\tilde{a}_{g_0}$ и по одной в каждом из сегментов a_{g_0+i}, на которые этот овал разбивается парой точек $p^i_\pm$, то соответствующий потенциал является вещественным и неособым.

Теорема 0.0.10. *[61] Предположим, что антиинволюция* $\sigma\tau$ *имеет разделяющий тип, т.е. что дополнение к ее неподвижным овалам состоит из двух несвязных областей* $\mathscr{T}^{\pm}$,

$$\sigma\tau(\mathscr{T}^{+}) = \mathscr{T}^{-}.$$

Если при этом $p_{\pm}^{i} \in \mathscr{T}^{\pm}$, *а дифференциал* $d\Omega$, *определяющий допустимый дивизор* D *положителен на данных неподвижных овалах относительно ориентации, индуцированной областью* $\mathscr{T}^{+}$, *и, кроме того, если*

$$res_{p_i^+} d\Omega < 0,$$

то соответствующий потенциал оператора Шредингера является вещественным и неособым.

Апробация результатов исследования

Результаты работы были представлены на международных конференциях

- *Спектральная теория оператора Шредингера*, воркшоп по Классическим и квантовым интегрируемым системам, Санкт–Петербург, 2019.
- *Конечномерные гамильтоновые редукции иерархии двумеризованной цепочки Тода,* Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2020.

По результатам исследований опубликовано две статьи

- А. В. Ильина, И. М. Кричевер, “Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода”, Функц. анализ и его прил., **51:1** (2017), 60–81.
- А. В. Ильина, И. М. Кричевер, Н. А. Некрасов, *Двумерные периодические операторы Шредингера, интегрируемые на “собственном” уровне энергии*, Функц. анализ и его прил., **53:1** (2019), 31–48.

Глава 1

Спектральная теория периодических строго нижнетреугольных разностных операторов и ее приложения

1.1 Пространство строго нижнетреугольных периодических разностных операторов

Настоящий раздел Главы 1 посвящен спектральной теории периодических разностных строго нижнетреугольных операторов. Во-первых, мы напомним, как по такому оператору построить спектральную кривую, функцию Бейкера–Ахиезера, двойственную функцию Бейкера–Ахиезера, мероморфный дифференциал на это кривой. Во-вторых, на пространстве таких операторов рассмотрим семейство 2–форм Кричевера–Фонга и укажем подмногообразия, на которых часть этих форм становятся невырожденными. Укажем координаты Дарбу и координаты, в которых плотности форм становятся локальными выражениями координат.

1.1.1 Спектральная кривая

Рассмотрим строго нижнетреугольный n–периодический оператор L порядка $k+1$, действующий на функцию ψ дискретного ургумента i

$$L\psi_i = \big(T^{-k-1} + \sum_{j=1}^{k} a_i^{(j)} T^{-j}\big)\psi_i = \psi_{i-k-1} + \sum_{j=1}^{k} a_i^j \psi_{i-j}, \tag{1.1.1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию периодичности

$$a_i^{(j)} = a_{i+n}^{(j)}. \tag{1.1.2}$$

Здесь T^{-1} стандартный оператор сдвига дискретного аргумента, т.е.

$$T^{-1}\psi_i = \psi_{i-1}.$$

Пространство таких операторов в дальнейшем будем обозначать $\mathscr{L}_{k+1}$. Центральное место в спектральной теории разностных операторов занимает понятие спектральной кривой.

Определение 1.1.1. *Спектральная кривая n–периодического разностного оператора L* (в дальнейшем будет обозначаться как Γ) — кривая, точки которой (E, w) параметризуют решения уравнения

$$L\psi = E\psi, \tag{1.1.3}$$

со свойством квазипериодичности

$$T^{-n}\psi = w\psi. \tag{1.1.4}$$

Найдем явный вид Γ. Пусть $\mathscr{L}(E)$ линейное пространство решений уравнения (1.1.3), имеющее размерность, равную порядку оператора L. Оператор монодромии сохраняет $\mathscr{L}(E)$ и, следовательно, определяет конечномерный оператор $T^{-n}(E)$ на нем. Пары комплексных чисел (w, E), для которых существует общее решение уравнений (1.1.3) и (1.1.4) определяются характеристическим уравнением:

$$R(w, E) = \det\big(w \cdot 1 - T^{-n}(E)\big) = 0.$$

Полином $R(w, E)$ может быть получен другим способом, а именно, как характеристический полином конечномерного оператора $L(w)$, являющегося ограничением L на пространство $\mathcal{T}(w) := \{\psi \mid w\psi_{i+n} = \psi_i\}$:

$$R(w, E) = \det\big(E \cdot 1 - L(w)\big) = 0, \quad L(w) := L\big|_{\mathcal{T}(w)}. \tag{1.1.5}$$

Оператор $L(w)$ в подходящем базисе можно записать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & wa_0^{(k)} & \dots & wa_0^{(2)} & wa_0^{(1)} \\
a_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w & wa_1^{(k)} \dots & wa_1^{(3)} & wa_1^{(2)} \\
a_2^{(2)} & a_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & w & \dots & wa_2^{(3)} \\
\vdots & & & & & & \dots\dots\dots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-2}^{(k)} & \dots & a_{n-2}^{(2)} & a_{n-2}^{(1)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1}^{(k)} & \dots & a_{n-1}^{(2)} & a_{n-1}^{(1)} & 0.
\end{pmatrix}$$

В работе [19] было отмечено, что соответствующий характеристический полином равен

$$R(w, E) = w^{k+1} - E^n + \sum_{i>0, j\geq 0,\ ni+(k+1)j<n(k+1)} r_{ij} w^i E^j = 0, \tag{1.1.6}$$

где $r_{1,0} = \prod_{i=1}^{n} a_i^1 \neq 0$. Если n и $k+1$ взаимно просты, тогда афинная кривая, определенная уравнением (1.1.6) в $\mathbb{C}^2$, компактифицируется одной точкой p_-. В этой точке функции $w(p)$ и $E(p)$, естественным образом определенные на Γ, имеют полюс порядка n и $k+1$ соответственно. Пусть z_- — локальная координата в окрестности точки p_-, такая, что $w = z_-^{-n}$. Тогда разложение в ряд Лорана функции E в окретности точки p_- есть

$$E(z_-) = z_-^{-k-1}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty} e_s z_-^s\right), \quad w = z_-^{-n}. \tag{1.1.7}$$

Особая форма уравнения (1.1.6) позволяет выделить другую отмеченную точку p_+ на Γ, являющуюся прообразом $E=0$ с $w=0$. В этой точке у $E=E(p)$ простой ноль, а у $w=w(p)$ ноль порядка n

$$w = \frac{1}{r_{1,0}} E^n\left(1+\sum_{s=1}^{\infty} w_s E^s\right). \tag{1.1.8}$$

В ситуации общего положения кривая Γ гладкая рода $g=\frac{n(k-1)}{2}$.

1.1.2 Решения Блоха–Флоке

Уравнение (1.1.6) — условие на собственное значение E, при котором существует собственный вектор для $L(w)$. Каждой точке $p=(w,E)\in\Gamma$ можно сопоставить собственный вектор $\psi(p)$ длины n для $L(w)$

$$(L(w)-E)\psi = 0, \; p=(w,E)\in\Gamma,$$

где

$$\psi(p) = \big(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n\big)^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что собственный вектор определен с точностью до константы. Выбирем условие нормировки

$$\psi_0(p) = 1, \; \forall p\in\Gamma,$$

или, что тоже самое, $\psi_n(p)=w^{-1}$. Аналитические свойства компонент собственного вектора в окрестности точек $p_\pm$ даются следующими двумя Леммами. Также ниже будут приведены их доказательства, детали которых необходимы в дальнейшем:

Лемма 1.1.1. *[19] Для любого оператор $L(w)$ вида (1.1.1), порядок и период которого взаимно просты, существует единственный формальный ряд $E(z_-)$ вида (1.1.7), такой что уравнение $L(w)\psi_- = E\psi_-$ имеет единственно формальное решение вида*

$$\psi_-(i) = z_-^i\big(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^-(i) z_-^s\big). \tag{1.1.9}$$

с периодическими коэффициентами $\xi_s^-(i)=\xi_s^-(i+n)$, нормированными условием $\xi_s^-(0)=0$.

Доказательство. Подстановка (1.1.9) и (1.1.7) в уравнение $L\psi = E\psi$ приводит к системе разностных уравнений на неизвестные константы e_s и неизвестные функции $\xi_s^-(i)$ дискретной переменной i. Первое из этих уравнений есть

$$e_1 + \xi_1^-(i) - \xi_1^-(i-k-1) = a_i^{(k)}. \tag{1.1.10}$$

Условие периодичности для функций ξ_1^- единственным образом определяет коэффициент

$$e_1 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \tag{1.1.11}$$

и редуцирует разностное уравнения (1.1.10) порядка $k+1$ к уравнению порядка 1:

$$me_s + \xi_1^-(i) - \xi_1^-(i-1) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{i-j(k+1)}^{(k)}\,, \tag{1.1.12}$$

где m целое число $1 \leq m < n$, такое что $m(k+1) = 1 \,(\mathrm{mod}\ n)$. Уравнение (1.1.12) и начальное условие $\xi_1^-(0) = 0$ единственным образом определяют $\xi_1^-(i)$. Для произвольного s уравнение, определяющее e_s и ξ_s^- имеет вид:

$$e_s + \xi_s^-(i) - \xi_s^-(i-k-1) = Q_s(e_1, \ldots, e_{s-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{s-1}, a_i^{(j)}) \tag{1.1.13}$$

где Q_s линейная функция по $e_{s'}, \xi_{s'},\ s' < s$, и полиномиальная по $a_i^{(j)}$. Аргументы, приведенные ранее, позволяют сделать вывод, что оно имеет единственное периодическое решение. □

Лемма 1.1.2. *[19] Уравнение $L(w)\psi_+ = E\psi_+$ имеет единственное формальное решение вида*

$$\psi_+(i) = e^{\varphi_i} E^{-i}\big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(i) E^s\big),\ \ a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}, \tag{1.1.14}$$

с условием нормировки $\xi_s^+(0) = 0$.

Доказательство. Подстановка (1.1.14) в (1.1.3) определяет систему неоднородных разностных уравнений первого порядка на неизвестные коэффициенты ξ_s^+. Для $s = 1$

$$\xi_1^+(i) - \xi_1^+(i-1) = e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} a_i^{(2)} \tag{1.1.15}$$

Для произвольного s уравнения принимают аналогичный вид

$$\xi_s^+(i) - \xi_s^+(i-1) = e^{-\varphi_i} q_s(\xi_1^+, \ldots, \xi_{s-1}^+, a_i^{(j)})\,, \tag{1.1.16}$$

которые вместе с начальными условиями рекуррентно определяют $\xi_s^+(i)$ для всех i. □

Следующая лемма позволяет сделать вывод о количестве полюсов собственного вектора $\psi(p)$:

Лемма 1.1.3. *Число полюсов блоховского вектора $\psi(p),\ p = (w, E) \in \Gamma$, равно роду кривой Γ, не считаю полюса в точке p_+.*

Доказательство. Доказательство стандартно и основано на том, что нужно рассмотреть хорошо определенную функцию комплексного аргумента $d(E)$, являющуюся квадратом определителя матрицы $D(E)$:

$$d(E) = \Big(\det\, D(E)\Big)^2,$$

где

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \psi_1(p_0) & \psi_1(p_1) & \dots & \psi_1(p_{k-1}) & \psi_1(p_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_k(p_0) & \psi_k(p_1) & \dots & \psi_k(p_{k-1}) & \psi_k(p_k) \end{pmatrix}.$$

□

Подведем итоги. Из сказанного выше следует, что компоненты вектора $\psi(p),\ p \in \Gamma$, рассматриваемые как функции на спектральной кривой, имеют нуль порядка i в точке p_- и полюс порядка i в точке p_+. Кроме того, $\psi_i(p)$ имеет g полюсов $\gamma_1, \dots \gamma_g$. Все эти аналитические свойства позволяют рассматривать $\psi_i(p)$ как *двухточечную дискретную функцию Бейкера–Ахиезера.*

Аналогично Леммам 1.1.1,1.1.2,1.1.3 и можно доказать следующие утверждения о левом собственном векторе ψ^+, который по-другому называется *двойственной функцией Бейкера–Ахиезера*:

Лемма 1.1.4. *Для любого оператор $L(w)$ вида (1.1.1), порядок и период которого взаимно просты, и формального ряда $E(z_-)$, определенного Леммой 1.1.1, существует единственное формальное решение ψ^+ уравнения*

$$\psi_-^+ L(w) = E\psi_-^+ \tag{1.1.17}$$

вида

$$\psi_-^+(i) = z_-^{-i}\big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^-(i) z_-^s\big). \tag{1.1.18}$$

с периодическими коэффициентами $\chi_s^-(i) = \chi_s^-(i+n)$, нормированными условием $\chi_s^-(0) = 0$.

Лемма 1.1.5. *Уравнение $\psi_+^+ L(w) = E\psi_+^+$ имеет единственное формальное решение ψ^+ с компонентами вида*

$$\psi_+^+(i) = e^{-\varphi_i} E^i \big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^+(i) E^s\big), \tag{1.1.19}$$

с условием нормировки $\chi_s^+(0) = 0$.

Лемма 1.1.6. *Число полюсов блоховского вектора $\psi^+(p),\ p = (w, E) \in \Gamma$ равно роду кривой Γ, не считая полюса в точке p_+.*

1.1.3 Дифференциал $d\Omega$

Целью Параграфа 1.1.3 является получение формул для мероморфного дифференциала $d\Omega$, имеющего простые полюса в точках p_+ и p_- с вычетами $+1$ и -1 соответсвенно и нули в полюсах $\psi(p)$ и $\psi^+(p)$.

Предположим, что коэффициенты оператора n-периодичны. Следуя схеме работы [53], рассмотрим дифференциал $d\psi$ по отношению к спектральному параметру. Он удовлетворяет неоднородному линейному уравнению

$$(L-E)\,d\psi = dE\psi, \tag{1.1.20}$$

которое получается дифференцированием уравнения (1.1.3). Дифференцируя (1.1.4), получаем, что $d\psi$ удовлетворяет соотношению

$$wd\psi_i + dw\psi_i = d\psi_{i-n} \tag{1.1.21}$$

Обозначим среднее функции f_i на интервале $l+1 \le i \le l+n$ через $\langle f\rangle_l := \frac{1}{n}\sum_{i=l+1}^{l+n} f_i$, а в случае n-периодических функций, когда это среднее не зависит от l, будем для краткости обозначать его через $\langle f\rangle$. Из (1.1.20) следует, что

$$E\langle\psi^+\,d\psi\rangle_l + dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \langle\psi^+(Ld\psi)\rangle_l = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+n} a_i^{(j)}\psi_i^+ d\psi_{i-j}. \tag{1.1.22}$$

Из уравнения на двойственную функцию (1.1.17) получаем

$$E\langle\psi^+\,d\psi\rangle_l = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+n} a_{i+j}^{(j)}\psi_{i+j}^+ d\psi_i = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1+j}^{l+n+j} a_i^{(j)}\psi_i^+ d\psi_{i-j}. \tag{1.1.23}$$

Подставляя (1.1.23) из (1.1.22) и используя (1.1.21), имеем

$$dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \frac{dw}{nw}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+j} a_i^{(j)}\psi_i^+\psi_{i-j}. \tag{1.1.24}$$

Заметим, что левая часть (1.1.24) не зависит от l. Следовательно, правая часть также независима от l. Усредняя по l, получаем равенство

$$dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \frac{dw}{nw}\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle \tag{1.1.25}$$

где

$$L^{(1)} := \sum_{j=1}^{k+1} ja_i^{(j)}T^{-j}. \tag{1.1.26}$$

есть разностный аналог первого *потомка* дифференциального оператора. Из (1.1.25) следует, что нули dw совпадают с нулями мероморфной функции $\langle\psi^+\psi\rangle$, а нули dE с нулями $\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle$. Следовательно,

Лемма 1.1.7. *Дифференциал*

$$d\Omega := \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle} = \frac{dE}{\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle}. \tag{1.1.27}$$

голоморфен вне отмеченных точек $p_\pm$, *имеет нули в полюсах* ψ *и* ψ^+, *а в точках* $p_\pm$ *имеет простые полюса с вычетами* ± 1.

Примеры В случае $k = 1$, т.е. когда оператор порядка два, дифференциал $d\Omega$ записывается как

$$d\Omega = \frac{dE}{\langle a_i^{(1)}\psi_i^+\psi_{i-1} + 2\psi_i^+\psi_{i-2}\rangle} = \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle}, \tag{1.1.28}$$

а для $k = 2$, т.е. оператор порядка три, как

$$d\Omega = \frac{dE}{\langle a_i^{(1)}\psi_i^+\psi_{i-1} + 2a_i^{(2)}\psi_i^+\psi_{i-2} + 3\psi_i^+\psi_{i-3}\rangle} = \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle}. \tag{1.1.29}$$

1.1.4 2–формы на пространстве периодических строго нижнетреугольных операторов

Следуя работам [20],[21], введем на *пространстве n–периодических операторов* $\mathscr{L}_{k+1}$ семейство два–форм

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \operatorname{res}_{p_\alpha} E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L \wedge \delta\psi(w)\rangle\, d\Omega,\ i \in \mathbb{N}. \tag{1.1.30}$$

Для произвольной функции F на пространстве операторов определим соответствующую вариацию $\delta F(L)$ (к примеру, функция Бейкера–Ахиезера с фиксированным значением w и нормировкой является такой функцией); для оператора L_{k+1}^- определение δ следующее

$$\delta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial a_i^j}\delta a_i^j,$$

где частные производные взяты при фиксированном значении w. Сумма в формуле (1.1.30) берется по таким точкам p_α на соответствующей спектральной кривой Γ, где выражение в правой части формулы (1.1.30) имеет полюс *a priori*: 1) в отмеченных точках $p_\pm$, где функция Бейкера–Ахиезера и ей двойственная имеют полюса; 2) в нулях p_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$ функции $E = E(p)$, где $w = w(p)$ не зануляется, т.е. $E(p_\ell) = 0$, при $w(p_\ell) \neq 0$. *A priori* не известно, является ли форма $\omega^{(i)}$ замкнутой и вырожденой на пространстве *всех* n–периодических строго нижнетреугольных операторов порядка $k+1$. После ограничения на некоторые подмногообразия, которые будут определены ниже, форма становится замкнутой. К сожалению, лишь формы $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ невырождены на соответствующих подмногообразиях. Таким образом, мы покажем, что на пространстве операторов L существует две симплектические структуры.

1.1.4.1 Независимость от нормировки для $\omega^{(i)}$

2–формы вида (1.1.30) на пространстве операторов вида $\mathscr{L}_{k+1}$ с периодическими коэффициентами включают в себя левые и правые собственные векторы для $L(w)$, определенные с точностью до нормировочного множителя. Таким образом, нужно дополнительно потребовать независимость $\omega^{(i)}$ от нормировки:

Лемма 1.1.8. *Ограничение формы $\omega^{(i)}$, заданной формулой (1.1.30), на подмногообразие пространства операторов, на котором дифференциал $E^{-i}\delta E(w)\, d\ln w$ голоморфен в окрестности точек p_α, не зависит от нормировки.*

Доказательство. Из работ [20],[21] следует, что условия, определяющие симплектические листы в каждой из пуассоновых сруктур, эквивалентны тому, что форма $\omega^{(i)}$ не зависит от выбора нормировки блоховской собственной функции ψ. Изменение нормировки эквивалентно преобразованию

$$\psi_i \to \psi_i h,\ \psi_i^+ \to \psi_i^+ h^{-1},$$

где $h = h(w)$ скалярная функция. Под действием такого преобразования форма $\omega^{(i)}$ преобразуется следующим образом

$$\omega^{(i)} \to \omega^{(i)} - \frac{1}{2}\sum_\alpha \operatorname{res}_{p_\alpha} E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L\psi(w)\rangle \wedge \delta\ln h\, d\Omega \tag{1.1.31}$$

Следовательно, форма $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки, когда последний член в (1.1.31) голоморфен в окрестности точек p_α. Для того, чтобы завершить доказательство Леммы, воспользуемся уравнением

$$(L-E)\delta\psi(w) = -(\delta L - \delta E(w))\psi$$

и определением левого собственного вектора

$$\langle\psi^+(\delta L - \delta E)\psi\rangle = \langle\psi^+(E-L)\delta\psi\rangle = 0. \tag{1.1.32}$$

□

Следствие 1. *Для произвольного набора констант $c = (c_1, \dots, c_k)$ определим Λ_0^c, как подмногообразие операторов L таких, что*

$$\Lambda_0^c := \{L|\, e_s(L) = c_s, s = 1, \dots k\} \tag{1.1.33}$$

где $e_s = e_s(L)$ коэффициенты разложения (1.1.7). Тогда Форма $\omega^{(0)}$, ограниченная на подмногообразие Λ_0^c, не зависит от нормировки.

Доказательство. В случае $i = 0$ для того, чтобы форма $\omega^{(0)}$ не зависила от нормировки, и соответственно была замкнутой, необходимо, чтобы форма $\delta E(w) d\ln w$ была голоморфной. Рассмотрим форму $Ed\ln w$: в точке p_+ у нее ноль, следовательно она имеет полюс в p_-, и вычет равный нулю. Таким образом, $e_{k+1} = 0$. В точке

p_+ форма $\delta d\ln w$ без особенностей, а в точке p_- у нее имеется полюс порядка $k+2$ с нулевым вычетом. $\square$

Следствие 2. *Пусть*

$$\Lambda_1^c := \{L|\, r_{i,0}(L) = c_i, 1 = 1, \dots k\} \tag{1.1.34}$$

где $c = (c_1, \dots, c_k)$ *константы,* $r_{i,0}(L) = r_{i,0}$ *коэффициенты многочлена* $\det L(w) = w^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} r_{i,0} w^i$. *Тогда Форма* $\omega^{(1)}$, *ограниченная на подмногообразие* Λ_1^c, *не зависит от нормировки.*

Доказательство. Форма $E^{-1}\delta E(w) d\ln w$ голоморфна в окрестности отмеченной точки p_-. Она голоморфна в точке p_+ , если голоморфна в точках p_ℓ, $\ell = 1\dots, k$ поскольку сумма ее вычетов равняется нулю. Используя цепное правило, получаем, что вариация $E(w)$ при фиксированном w связана с вариацией $w(E)$ при фиксированном E формулой $\delta E(w)\, dw + \delta w(E)\, dE = 0$. Следовательно, если выполняется уравнение $\delta w(p_\ell) = 0$, тогда $\delta \ln E(w)\, d\ln w$ голоморфен в p_ℓ (прообразы $E = 0$, где $w \neq 0$) . Последнее имеет место на Λ_1^c. $\square$

Замечание 1.1.1. *Для* $i > 1$ *подмногообразие* Λ_i^c *на котором ограничение* $\omega^{(i)}$ *не зависит от нормировки, описывается системой*
$i(k+1) - 1$ *уравнений:*

$$\Lambda_i^c := \{L \in \Lambda_i^c|\, w_{\ell,s} = c_{\ell,s}, s = 1, \dots, i;\, w_s = c_s, s = 2, \dots, i\} \tag{1.1.35}$$

где $w_{\ell,s}$ *есть коэффициенты разложения*

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_{\ell,s} E^s \tag{1.1.36}$$

функции w *в прообразах* p_ℓ *на* Γ *точки* $E = 0$, *в котором* $w(p_\ell) \neq 0$; w_s *это коэффициенты разложения функции* w *в* p_+ *и* $c_{i,s}, c_s$ *константы. Следовательно,* Λ_i^c *имеет размерность* $(n-1)k - i + 1$. *Напомним, что размерность семейства кривых* Γ, *заданных уравнениями вида (1.1.6) равна* $\frac{k(n+1)}{2}$ *(число коэффициентов* r_{ij}*). Для общих значений коэффициентов* r_{ij} *кривая* Γ *гладкая кривая рода* $g = \frac{k(n-1)}{2}$. *Поэтому, соответствие*

$$L \to (\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_g),$$

ограниченное на Λ_i^c, *отождествляет последнее с тотальным пространством Якобиевых расслоений над пространством соответствующих спектральных кривых. Для* $i > 1$ *размерность слоя больше , чем размерность базы. Следовательно, форма* $\omega^{(i)}$, *ограниченная на* Λ_i^c *вырождена для* $i > 1$.

1.1.4.2 Координаты Дарбу, переменные действие–угол и невырожденность

Предъявим координаты Дарбу ограничения формы $\omega^{(i)}$ на подмногообразие Λ_i^c (в дальнейшем будем обозначать $\widehat{\omega}^{(i)}$), т.е.

$$\widehat{\omega}^{(i)} := \omega^{(i)}|_{\Lambda_i^c}. \tag{1.1.37}$$

Теорема 1.1.1. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ полюса функции Бейкера–Ахиезера. Имеет место равенство*

$$\widehat{\omega}^{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{g} E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s) \wedge \delta \ln w(\gamma_s),\ \ i = \overline{1,2}. \tag{1.1.38}$$

Доказательство. Идея доказательство формулы (1.1.38) является весьма общей и не опирается на особый вид L. Мы будем следовать доказательству Леммы 5.1 в работе [55] (также см. [56]).

1. Дифференциал, вычеты которого определяют $\omega^{(i)}$ по формуле (1.1.30), является мероморфным дифференциалом на спектральной кривой Г. Поэтому, сумма его вычетов в точках p_α равняется со знаком минус сумме вычетов в оставшихся точках. У дифференциала имеются полюса двух типов. Первый из них это полюса γ_s функции ψ. В общем положении эти полюса простые. Заметим, что $\delta\psi$ имеет полюс второго порядка в γ_s. Принимая во внимание, что дифференциал $d\Omega$ равен нулю в γ_s, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{\gamma_s} E^{-i}\langle \psi^+\, \delta L \wedge \delta\psi\rangle\, d\Omega &= \frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta L\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s) = \\ &= \frac{1}{n}E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s).\end{aligned} \tag{1.1.39}$$

Последнее равенство следует из (1.1.32), представляющего собой не более чем стандартную формулу для вариации собственного значения оператора.

2. Вторым типом полюсов дифференциала в правой части (1.1.30) является множество нулей q_j дифференциала dw. Действительно, в окрестности q_j локальной координатой на спектральной кривой является $\sqrt{w - w(q_j)}$ (в общем положении, когда ноль простой). Для вариации ряда Тейлора ψ по координате имеем

$$\delta\psi = -\frac{d\psi}{dw}\delta w(q_j) + O(1). \tag{1.1.40}$$

Поэтому, $\delta\psi$ имеет простой полюс в q_j. Тем же способом получаем, что

$$\delta E = -\frac{dE}{dw}\delta w(q_j). \tag{1.1.41}$$

Из равенств (1.1.40) и (1.1.41) следует

$$\mathrm{res}\,_{q_j} E^{-i}\langle\psi^+\delta L\wedge\delta\psi\rangle\, d\Omega = \mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta L d\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\frac{\delta E d\ln w}{dE} \tag{1.1.42}$$

Из кососимметричности внешнего произведения следует что в (1.1.42) можно заменить δL на $(\delta L - \delta E)$. Тогда, используя тождества $\psi^*(\delta L - \delta E) = \delta\psi^*(E - L)$ и $(E - L)d\psi = -dE\psi$, получаем

$$\mathrm{res}_{q_j} E^{-i}\langle\psi^+\delta L \wedge \delta\psi\rangle d\Omega = -\mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\delta\psi^+\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle} \wedge \delta E d\ln w = \tag{1.1.43}$$

$$= \mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle} \wedge \delta E d\ln w\,,$$

где в последнем равенстве использовалось тождество $\langle\psi^+\psi\rangle(q_j) = 0$ (которое следует, как уже было замечено, из (1.1.25)). По определению подмногообразия, на котором $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки (см. лемму 1.1.8), форма в правой части (1.1.43) не имеет полюсов в точках p_α. Кроме полюсов в q_i, она имеет полюса только в γ_s. Поэтому, после ограничения на такое подмногообразие, получаем равенство

$$\sum_j \mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle} \wedge \delta E d\ln w = -\sum_s \mathrm{res}_{\gamma_s}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle} \wedge \delta E d\ln w = \tag{1.1.44}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_s E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s) \wedge \delta\ln w(\gamma_s).$$

Равенство (1.1.38) является прямым следствием уравнений (1.1.39),(1.1.43), (1.1.44). □

Замечание 1.1.2. *Из (1.1.38) видно, что $\widehat{\omega}^i$ замкнута и невырождена, т.е. симплектическая.*

1.1.4.3 Специальные системы координат

В этом параграфе найдем подходящую систему координат, в которой формы $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ имели бы локальные плотности.

Определение 1.1.2. 2–форма ω имеет *локальные плотности*, если найдется такая система координат x_i^j, что

$$\omega = \sum f_{i_1,i_2}^{(j_1,j_2)} dx_{i_1}^{(j_1)} \wedge dx_{i_2}^{(j_2)},$$

где сумма взята по множеству всех индексов, т.ч. $|i_1 - i_2| < d_1$ для некоторого d_1, не зависящего от периода n оператора, и предполагается, что коэффициенты $f_{i_1,i_2}^{(j_1,j_2)}$ являются функциями параметров $x_{i_2}^{(j_2)}$, таких что $|i_1 - i_2| < d_2$ для некоторого не зависящего от n числа d_2.

Замечание 1.1.3. *В естественных координатах a_i^j формы $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ не имеют локальных плотностей.*

Лемма 1.1.9. *В координатах $\{\xi_s^-(i), e_s\}$, $s = \overline{1,k}$, где $\xi_s^-(i)$ коэффициенты разложения в формуле (1.1.9), e_s из (1.1.7) форма $\omega^{(0)}$ имеет локальные плотности.*

Доказательство. Действительно, форма $\omega^{(0)}$ из (1.1.30)

$$\omega^{(0)} = -\frac{1}{2}\text{res}_{p_-}\langle\psi^*\delta L \wedge \delta\psi\rangle d\ln z_-$$

представляет собой среднее по i некоторого выражения, зависящего от $\xi_s^-(i-j), j = 0\dots k$, и от первых $(k-1)$ коэффициентов разложения в p_- функции

$$\psi_i^* := \frac{\psi_i^+}{\langle\psi^+\psi\rangle}, \tag{1.1.45}$$

где ψ^+ двойственная функция Бейкера–Ахиезера. Причем, для ψ^* выполняется

$$\text{res}_{p_-}\psi_i^*\psi_{i-j}d\ln z_- = \delta_{0,j}, \tag{1.1.46}$$

и выражения для этих коэффициентов в терминах $\xi_s^-(i)$ локальны. □

Замечание 1.1.4. *Формулы (1.1.10) и (1.1.13) для $s = 1,\dots k$ могут быть рассмотрены как определение отображения*

$$\{\xi_s^-(i), e_s\} \longmapsto \{a_i^{(j)}\}, \tag{1.1.47}$$

где функции $\xi_s^-(i)$ определены с точностью до общего сдвига $\xi_s^-(i) \to \xi_s^-(i) + c_i$. Этот сдвиг можно зафиксировать условием нормировки $\xi_s^-(0) = 0$.

Наша следующая цель — найти такие координаты, в которых $\omega^{(1)}$ имеет локальные плотности. Пусть $\Phi = \{\phi_i^\ell\}$ матрица размера $k \times n$ ранга k, $i = \overline{1,n}, \ell = \overline{1,k}$. Определим отношение эквивалентности на таких матрицах: две матрицы $\Phi \sim \Phi'$ *эквивалентны*, если $\Phi' = \Phi\lambda$, где $\lambda = \text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$. Пространство классов эквивалентности $[\Phi] := (\Phi/\sim)$ есть множество (упорядоченных) наборов из k *различных* точек в $n-1$ мерном проективном пространстве, $[\phi^\ell] \in \mathbb{P}^{n-1}$. Рассмотрим пространство пар $\{[\Phi], W\}$, где $W = \{w_1,\dots,w_k\}$ множество ненулевых чисел, $w_\ell \neq 0$. Симметрическая группа S_k действует на пространстве таких пар перестановками строк матрицы Φ и координат вектора W. Определим отображение из соответствующего фактор-пространства в пространство n-периодических операторов L вида (1.1.1):

$$\{[\Phi], W\}/S_k \longmapsto L. \tag{1.1.48}$$

Если набор ненулевых чисел $W = \{w_1,\dots,w_k\}$ фиксирован, то произвольная $(k\times n)$-матрицы Φ может быть расширена до единственной $(k\times\infty)$-матрицы $\phi_i^\ell, i \in \mathbb{Z}$ такой, что выполнено соотношение $\phi_{i-n}^\ell = w_\ell\phi_i^\ell$. Имея такое расширение, можно единственным образом определить L вида (1.1.1), т.ч. для произвольного ℓ последовательность

$\phi^\ell = \{\phi_i^\ell\}$ является решением уравнения

$$L\phi^\ell = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{k} a_i^{(j)} \phi_{i-j}^\ell = -\phi_{i-k-1}^\ell. \tag{1.1.49}$$

Действительно, для фиксированного i уравнения (1.1.49) — система k неоднородных линейных уравнений на неизвестные коэффициенты L. Используя правило Крамера, получаем, что

$$a_i^{(j)} = -\frac{|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|}{|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1},\ \phi_{i-j}\ ,\ \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|}, \tag{1.1.50}$$

где ϕ_i - k-мерный вектор с координатами $\phi_i := \{\phi_i^\ell\}$, и $|V_1, \ldots, V_k| := \det\left(V_i^\ell\right)$ для произвольного множества $V_1, \ldots, V_k$ k-мерных векторов. Поскольку $a_i^1 = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$ и выполняется уравнение (1.1.50) с $j = 1$, то можно представить a_i^1 в виде

$$a_i^{(j)} = (-1)^{ik+1} e^{\varphi_i} |\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|, \tag{1.1.51}$$

где

$$e^{-\varphi_i} := (-1)^{ik} |\phi_{i-1}, \ldots, \ldots, \phi_{i-k}|. \tag{1.1.52}$$

Следующая Лемма говорит нам о том, как записывается левый собственный вектор в терминах ϕ_i

Лемма 1.1.10. *Имеют место равенства*

$$r_\ell \psi_i^+(p_\ell) = \frac{(-1)^{\ell+k} \det \widehat{\Phi}_{i-2}^{\ell,k}}{|\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k-1}|} \tag{1.1.53}$$

где $r_\ell := res_{p_\ell} E^{-1} d\Omega$ и $\widehat{\Phi}_i$ есть $(k \times k)$ матрица со столбцами $(\phi_i, \ldots, \phi_{i-k+1})$, и $\widehat{\Phi}_i^{\ell,k}$ получается из $\widehat{\Phi}_i$ удалением ℓ-ой строки и последнего столбца.

Доказательство. По определению $d\Omega$, дифференциал $\psi_i^+ \psi_{i-j} E^{-1} d\Omega$ голоморфен вне точек $p_\pm$ и точек p_ℓ, где E зануляется. Для $2 \leq j \leq k$ он голоморфен в $p_\pm$. Следовательно, сумма его вычетов в p_ℓ равняется нулю:

$$\sum_{\ell=1}^{k} \mathrm{res}_{p_\ell}\ \psi_i^+ \psi_{i-j} E^{-1} d\Omega = \sum_\ell r_\ell \psi_i^+(p_\ell) \phi_{i-j}^\ell = 0,\ \ j = 2, \ldots, k \tag{1.1.54}$$

Дифференциал $\psi_i^+ \psi_{i-j} E^{-1} d\Omega$ голоморфен в p_- и имеет простой полюс в p_+ с вычетом -1. Тогда

$$\sum_l\ \mathrm{res}_{p_\ell} \psi_i^+ \psi_{i-k-1} E^{-1} d\Omega = \sum_\ell r_\ell \psi_i^+(p_\ell) \phi_{i-k-1}^\ell = 1. \tag{1.1.55}$$

Уравнения (1.1.54) и (1.1.55) представляют собой систему линейных уравнений на неизвестные $r_\ell \psi_i(p_\ell)$. Из правила Крамера следует (1.1.53). $\square$

Теорема 1.1.2. *Отображение (1.1.48), определенное формулами (1.1.52, 1.1.51), является взаимно-однозначным соответствием между открытыми областями. При этом, форма* $\omega^{(1)}$ *имеет вид*

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2}\langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i\rangle - \langle(-1)^{(i-1)k} e^{\varphi_{i-1}} \sum_{j=1}^{k} da_i^{(j)} \wedge |\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}|\rangle, \qquad (1.1.56)$$

где a_i^j *даются формулой (1.1.51), а* φ_i *формулой (1.1.52).*

Доказательство.

1. Правая часть (1.1.50) симметрична по отношению к перестановкам строк матриц в числителе и знаменателе. Следовательно, отображение (1.1.48) хорошо определено на области, где знаменатель не обращается в ноль. Обратное отображение определено отождествлением w_ℓ с ненулевыми корнями многочлена $R(w,0) = \det L(w)$ из (1.1.5). Другими словами, w_ℓ представляет собой значение функции $w(p)$ на спектральной кривой Γ оператора L в одном из прообразов $E = 0$, i.e. $p_\ell : (w_\ell, 0) \in \Gamma$. Из этого отождествления следует, что ϕ_i есть ничто иное, как значение функции Бейкера–Ахиезера в p_ℓ, т.е. $\phi_i^\ell = \psi_i(p_\ell)$. Следовательно, первое утверждение теоремы доказано.

2. Форма $\omega^{(1)}$ представляет собой сумму вычетов выражения

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\langle \delta a_i^j \wedge \psi_i^* \delta\psi_{i-j}\rangle E^{-1} d\ln w$$

в точках $p_\pm$ и p_ℓ, $\ell = \overline{1,k}$. Заметим, что в точке p_- вычет равен нулю. В точке p_+

$$-\frac{1}{2}\mathrm{res}_{p_+}\sum_{j=1}^{k}\langle \delta a_i^j \wedge \psi_i^* \delta\psi_{i-j}\rangle E^{-1} d\ln w = -\frac{1}{2}\langle \delta a_i^1 \zeta_0^+(i) \wedge \delta\xi_0^+(i-1)\rangle,$$

где $\zeta_0^+(i)$ и $\xi_0^+(i)$ старшие коэффициенты разложения ψ_i^* и ψ_i в окрестности точки p_+. Поскольку $\mathrm{res}_{p_+}\psi_i^*\psi_i d\ln E = 1$, то $\zeta_0^+(i) = e^{-\varphi_i}$ и

$$-\frac{1}{2}\mathrm{res}_{p_+}\sum_{j=1}^{k}\langle \delta a_i^j \wedge \psi_i^* \delta\psi_{i-j}\rangle E^{-1} d\ln w = \frac{1}{2}\langle \delta\varphi_{i-1} \wedge \delta\varphi_i\rangle,$$

где было использовано $a_i^1 = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$. Далее, выражение для ψ^+ в терминах ϕ_i^ℓ дается Леммой 1.1.10. Заметим, что при последовательном умножении правой части (1.1.53) на $d\phi_{i-j}^\ell$ и суммированием по ℓ, можно отождествить последнее с разложением определителя по последнему столбцу, т.е.

$$-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{k} r_\ell \psi_i^+(p_\ell) d\phi_{i-j}^\ell = -\frac{1}{2}\frac{|\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}|}{|\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k-1}|} = \qquad (1.1.57)$$

$$= \frac{(-1)^{k(i-1)+1}}{2}\,|\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}| e^{\varphi_{i-1}}$$

Из всего вышесказанного следует второе утверждение теоремы.

□

1.1.5 Суперпериодический случай

В этом параграфе мы обратимся к некоторым фактам спектральной теории суперпериодических операторов из [19], используя которые, найдем симплектическую структуру на пространстве суперпериодических разностных операторов.

Определение 1.1.3. Пространство n–периодических операторов порядка $k+1$, действующих на функцию дискретного аргумента по правилу

$$L'\psi'_i = \psi'_{i-k-1} + a_i^k\psi'_{i-k} + \dots a_i^1\psi'_{i-1},\ a_{i+n}^j = a_i^j \tag{1.1.58}$$

и таких, что все решения задачи $L\psi'_i \equiv -\psi'_i$ являются n–(анти)периодическими функциями, т.е.

$$\psi'_{i+n} = (-1)^{n+k}\psi'_i \tag{1.1.59}$$

будем называть *пространством суперпериодических разностных операторов* порядка $k+1$ с периодом n и обозначать как $\mathcal{E}_{k+1,n}$.

Спектральная кривая суперпериодического оператора $L' \in \mathcal{E}_{k+1,n}$ (в дальнейшем будем обозначать ее $\Gamma(L')$) не является гладкой кривой. В самом деле, на кривой $\Gamma(L')$ существует точка $\big(w(E_0), E_0\big) = \big((-1)^{n+k}, -1\big) =: p_0$, в которой все листы накрытия $E:\ \Gamma(L') \to \mathbb{C}$ пересекаются трансверсально. Определим $\Sigma_{k+1,n}(L')$ как пространство алгебраических кривых $\hat\Gamma(L')$, т.ч. отображение нормализации $\pi:\ \hat\Gamma(L') \to \Gamma(L')$ разрешает особенность в точке p_0 (т.е. π взаимнооднозначное отображение за исключением $k+1$ точек $p_j \in \hat\Gamma(L')$, являющихся прообразами точки p_0, т.е. $\pi(p_j) = p_0$). Кривую $\hat\Gamma(L')$ можно охарактеризовать следующим образом

1. На $\hat\Gamma(L')$ существует мероморфная функция w, имеющая ноль порядка n в точке p_+ и полюс порядка n в точке p_-;

2. На $\hat\Gamma(L')$ существует мероморфная функция E, имеющая единственный полюс порядка $k+1$ в точке p_-, и т.ч. функция $E+1$ имеет различные нули в точках p_j, а функция $w-(-1)^{n+k}$ также зануяется, т.е.

$$w(p_j) = (-1)^{n+k},\ E(p_j) = -1,\ j = \overline{1, k+1}. \tag{1.1.60}$$

Введем обозначение $\hat\psi = \pi^*(\psi')$, т.е. $\hat\psi$ – прообраз Блоховской функции ψ при отображении нормализации π.

Теорема 1.1.3. *([19]) Для открытого множества операторов $L' \in \mathcal{E}_{k+1,n}$ блоховское решение $\hat\psi'$ уравнения $L'\hat\psi' = E\hat\psi'$ параметризуется точками p гладкой алгебраической кривой $\hat\Gamma(L') \in \Sigma_{k+1,n}$. Кроме того, функция $\hat\psi'_i(p)$ является функцией Бейкера-Ахиезера.*

Рассмотрим модифицированную версию формы Кричевера–Фонга (1.1.30) на пространстве $\mathcal{E}_{k+1,n}$

$$\tilde{\omega} = -\frac{1}{2}\sum_{p_\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha}\langle \hat{\psi}'^{+}\delta L' \wedge d\hat{\psi}'\rangle \frac{d\Omega}{(E+1)}, \tag{1.1.61}$$

где суммирование идет по точкам

$$p_\alpha \in \{p_\pm,\ p_j \in \hat{\Gamma}(L'), j \in \overline{1, k+1}\}.$$

Аналогично случаю формы, определенной формулой (1.1.30), подмногообразия, на которых $\tilde{\omega}$ не зависит от нормировки, определяется условием голоморфности дифференциала $\frac{\delta E(w)}{E+1} d\ln w$ в окрестности точек $p_j,\ j \in \overline{1, k+1}$ (см. Лемму 1.1.8). Заметим, что условия голоморфности в точках $p_\pm$ нет в силу того, что этот дифференциал голоморфен в точках $p_\pm$ автоматически.

Пример. Рассмотрим простейший случай пространства $\mathcal{E}_{2,n}$, т.е.

$$\begin{cases} \hat{\psi}'_{i-2} + a_i\hat{\psi}'_{i-1} = -\hat{\psi}'_i,\ a_{i+n} = a_i \\ \hat{\psi}'_{i+n} = -\hat{\psi}'_i. \end{cases} \tag{1.1.62}$$

Применив теорему о вычетак к дифференциалам $\frac{\hat{\psi}_i^+\hat{\psi}_i}{E+1}d\Omega$ и $\frac{\hat{\psi}_i^+\hat{\psi}_{i-1}}{E+1}d\Omega$ получим систему уравнений на неизвестные функции $\hat{\psi}_i'^{+}(p_1)$ и $\hat{\psi}_i'^{+}(p_2)$ вида

$$\begin{cases} r_1\hat{\psi}_i'^{+}(p_1)\hat{\psi}'_i(p_1) + r_2\hat{\psi}_i'^{+}(p_2)\hat{\psi}'_i(p_2) = -1, \\ r_1\hat{\psi}_i'^{+}(p_1)\hat{\psi}'_{i-1}(p_1) + r_2\hat{\psi}_i'^{+}(p_2)\hat{\psi}'_{i-1}(p_2) = 0, \end{cases}$$

$r_j = \mathrm{res}_{p_j} d\Omega$, решая которую, находим

$$\hat{\psi}_i'^{+}(p_1) = \frac{-\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\Delta r_1},\ \hat{\psi}_i'^{+}(p_2) = \frac{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)}{\Delta r_2}, \tag{1.1.63}$$

где

$$\Delta = -\det\begin{pmatrix} \hat{\psi}'_i(p_1) & \hat{\psi}'_{i-1}(p_1) \\ \hat{\psi}'_i(p_2) & \hat{\psi}'_{i-1}(p_2) \end{pmatrix} \tag{1.1.64}$$

Несложно получить, что Δ не зависит от i. Подставляя очевидное равенство $a_i = -\frac{\hat{\psi}'_i(p_j)+\hat{\psi}'_{i-2}(p_j)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_j)},\ j = 1, 2$ и формулы (1.1.63) в (1.1.61), имеем

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\sum_j \langle r_j\hat{\psi}_i'^{+}(p_j)\delta a_i \wedge \delta\hat{\psi}'_{i-1}(p_j)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\langle d\ln\hat{\psi}'_i(p_j) \wedge d\ln\hat{\psi}'_{i-1}(p_j)\rangle$$

Лемма 1.1.11.

$$\langle d\ln\hat{\psi}'_i(p_1) \wedge d\ln\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)\rangle = \langle d\ln\hat{\psi}'_i(p_2) \wedge d\ln\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)\rangle$$

Доказательство. Из (1.1.64) и того, что Δ постоянно, следует

$$d\hat{\psi}'_i(p_2) = \frac{d\hat{\psi}'_i(p_1)\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)} + \frac{\hat{\psi}'_i(p_1)d\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)} - \frac{\hat{\psi}'_i(p_1)\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'^2_{i-1}(p_1)}d\hat{\psi}'_{i-1}(p_1) + \Delta\frac{d\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)}{\hat{\psi}'^2_{i-1}(p_1)}.$$

Имеет место цепочка равенств:

$$\langle d\ln\hat{\psi}'_i(p_2)\wedge d\ln\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)\rangle = \langle\frac{d\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)\wedge d\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_i(p_2)\hat{\psi}'^2_{i-1}(p_1)}\times\Big(\frac{\Delta}{\psi'_{i-1}(p_2)} - \psi'_i(p_1)\Big)\rangle +$$

$$+\langle\frac{d\hat{\psi}'_i(p_1)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)}\wedge\frac{d\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_i(p_2)}\rangle = -\langle\frac{d\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)\wedge d\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}\rangle + \langle\frac{d\hat{\psi}'_i(p_1)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)}\wedge\frac{d\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_i(p_2)}\rangle =$$

$$=\langle\frac{d\hat{\psi}'_i(p_1)}{\hat{\psi}'_i(p_2)}\wedge\big(\frac{d\hat{\psi}'_{i-1}(p_2)}{\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)} - \frac{d\hat{\psi}'_i(p_2)}{\hat{\psi}'_i(p_1)}\big)\rangle = \langle\frac{d\hat{\psi}'_i(p_1)}{\hat{\psi}'_i(p_1)}\wedge\frac{\hat{\psi}'_i(p_2)d\hat{\psi}'_{i-1}(p_1) - \hat{\psi}'_{i-1}(p_2)d\hat{\psi}'_i(p_1)}{\hat{\psi}'_i(p_2)\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)}\rangle =$$

$$= \langle d\ln\hat{\psi}'_i(p_1)\wedge d\ln\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)\rangle$$

□

Используя Лемму 1.1.11 и вышесказанное, получаем утверждение

Лемма 1.1.12. *2–форма*

$$\tilde{\omega} = \langle d\ln\hat{\psi}'_i(p_1)\wedge d\ln\hat{\psi}'_{i-1}(p_1)\rangle$$

на пространстве $\mathcal{E}_{2,n}$, т.ч. $(n,2)=1$, при ограничении на подмногообразие $\hat{\Lambda}_2$, где

$$\hat{\Lambda}_2 = \{\textit{дифференциал }\ \frac{\delta E(w)}{E+1}d\ln w\ \textit{ голоморфен в }\ p_j,\ j\in\overline{1,k+1}\},$$

не зависит от нормировки.

Доказательство. Полностью аналогично Лемме 1.1.8. Изменение нормировки эквивалентно преобразованию

$$\psi_i \to \psi_i h,\ \psi_i^+ \to \psi_i^+ h^{-1},$$

где $h = h(w)$ скалярная функция. Тогда $\omega^{(i)}$ преобразуется как

$$\tilde{\omega} \to \tilde{\omega} - \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{res}_{p_\alpha}(E+1)^{-1}\langle\psi^+(w)\,\delta L\psi(w)\rangle\wedge\delta\ln h\,d\Omega \tag{1.1.65}$$

Следовательно, форма $\tilde{\omega}$ не зависит от нормировки, если последний член в (1.1.65) голоморфен в окрестности p_α. Т.к. $\langle\psi^+\delta L\psi\rangle = \langle\psi^+\delta E\psi\rangle$, то утверждение доказано.

□

Замечание 1.1.5. *Заметим, что форма $\frac{\delta E}{E+1}d\ln w$ на $\mathcal{E}_{2,n}$ голоморфна в p_α автоматически, т.е. на $\mathcal{E}_{2,n}$ форма $\tilde{\omega}$ не зависит от нормировки.*

Замечание 1.1.6. *Аналогично Теореме 1.1.1 мы можем получить координаты Дарбу для* $\tilde{\omega}$, *т.е.*

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{g'} \delta \ln(E(\gamma_s) + 1) \wedge \delta \ln w(\gamma_s).$$

Отсюда следует, что форма $\tilde{\omega}$ *замкнута и невырождена.*

1.2 Динамика на пространстве периодических строго нижнетреугольных разностных операторов

1.2.1 Иерархия двумеризованной цепочки Тода

В данном параграфе приведен удобный для настоящей работы подход к построению иерархии двумеризованной цепочки Тода. Пусть $\psi_\pm = \{\psi_\pm(i)\}$ набор формальных рядов дискретного аргумента i, т.ч.

$$\begin{cases}\psi_-(i) = z_-^i(1+\sum_{s=1}^\infty \xi_s^-(i) z_-^s),\\ \psi_+(i) = z_+^{-i} e^{\varphi_i}(1+\sum_{s=1}^\infty \xi_s^+(i) z_+^s)\end{cases} \tag{1.2.1}$$

По набору ψ_- можно построить единственным образом разностный оператор L_m^- (по ψ_+ оператор L_m^+ соответственно) вида (0.0.3), т.ч.

$$\begin{cases}L_m^-\psi_-(i) = z_-^{-m}\psi^-(i) + O(z)\psi^-(i)\\ L_m^+\psi_+(i) = z_+^{-m}\psi^+(i) + O(1)\psi^+(i),\end{cases} \tag{1.2.2}$$

коэффициенты которого есть функции от коэффициентов разложения (1.2.1). Определим корректным образом динамику на пространстве коэффициентов формальных рядов $\psi^\pm$ уравнениями

$$\begin{cases}\big(\partial_{t_m^-} - L_m^-\big)\psi_- = -z_-^{-m}\psi_-\\ \big(\partial_{t_m^-} - L_m^-\big)\psi_+ = 0\\ \big(\partial_{t_m^+} - L_m^+\big)\psi_+ = -z_+^{-m}\psi_+\\ \big(\partial_{t_m^+} - L_m^+\big)\psi_- = 0\end{cases} \tag{1.2.3}$$

Коммутативность потоков $\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm$ очевидна, ввиду того, что $[\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm, \partial_{t_{m'}^\pm} - L_{m'}^\pm]$ есть разностный оператор, действующий на $\psi_\pm$ нулем. Далее, верны следующие две леммы

Лемма 1.2.1. *Существуют единственные операторы* $\mathcal{L}_- = T^{-1} + \sum_{j=1}^\infty u_j^- T^{j-1}$ *и* $\mathcal{L}_+ = u_0 T + \sum_{j=1}^\infty u_j T^{1-j}$, *т.ч. выполняются уравнения*

$$\mathcal{L}_-\psi_- = z_-^{-1}\psi_-, \tag{1.2.4}$$

и

$$\mathcal{L}_+\psi_+ = z_+^{-1}\psi_+. \tag{1.2.5}$$

Доказательство. Коэффициенты операторов $\mathcal{L}_\pm$ единственным образом восстанавливаются из разложения функции Бейкера–Ахиезера в окрестности точек $p_\pm$. □

Лемма 1.2.2. *Имеет место следующее соотношение*

$$\big(\mathcal{L}_-^m\big)_{\le 0} = L_m^-,\ \big(\mathcal{L}_+^m\big)_{>0} = L_m^+, \tag{1.2.6}$$

где $\mathcal{L}_\pm$ *из Леммы 1.2.1.*

Доказательство. Оператор L_m^- определяется как единственный разностный оператор, для которого выполняется соотношение $L_m^-\psi_- = \big(z_-^{-m} + O(z_-)\big)\psi_-$. С другой стороны, $\big(\mathcal{L}_-^m\big)_{\leq 0}\psi_- = \Big(\mathcal{L}_-^m - \big(\mathcal{L}_-^m\big)_{>0}\Big)\psi_- = \big(z_-^{-m} + O(z)\big)\psi_-$. Рассмотрим разность операторво $\big(L_m^- - \big(\mathcal{L}_-^m\big)_{\leq 0}\big)$, для которой выполняется

$$\big(L_m^- - \big(\mathcal{L}_-^m\big)_{\leq 0}\big)\psi_- = O(z)\psi_-.$$

Из чего следует равенство (1.2.6). Аналогичные рассуждения приводят ко второму равенству (1.2.6). □

Из вышесказанного следует, что данный подход к построению иерархии двумеризованной цепочки Тода эквивалентен подходу, связанному с уравнениями Захарова-Шабата (0.0.2) и представлением Лакса (0.0.4). Действительно, построенная по $\psi_\pm$ система коммутирующих потоков $\partial_{t_m^\pm} - L_m^\pm$ есть система уравнений Захарова–Шабата (0.0.2). Кроме того, определенные единственным образом псевдодифференциальные операторы $\mathcal{L}_\pm$ из уравнений (1.2.4) и (1.2.5) удовлетворяют соотношениям (1.2.6). Верно и обратное, по $\mathcal{L}_\pm$ можно построить $\psi_\pm$ вида (1.2.1) как единственные решения уравнений (1.2.4) и (1.2.4). Таким образом, иерархию двумеризованнной цепочки Тода можно рассматривать и как динамическую систему на пространстве коэффициентов формальных рядов $\psi_\pm$.

1.2.2 Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода

Как обсуждалось во Введении, основная цель настоящей Главы — изучение гамильтоновой теории динамики конечномерных систем, полученных редукцией двумеризованной цепочки Тода. Пусть L n–периодический оператор порядка $k+1$,

$$L := L_{k+1}^-, \tag{1.2.7}$$

для которого $\psi_\pm$ являются собственными, т.е.

$$\begin{cases} L\psi_- = z_-^{-k-1}\psi_- \\ L\psi_+ = z_+\psi_+. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Очевидно выполнится уравнение

$$\partial_{t_m^\pm} L = [L, L_m^\pm]. \tag{1.2.9}$$

Мы хотим доказать, что уравнение (1.2.9) есть хорошо определенная динамическая система на пространстве операторов $\mathscr{L}_{k+1}$. Для этого введем несколько ограничений и предположим, что n и $k+1$ взаимнопросты. Покажем, что коэффициенты $L_m^\pm$ есть функции от коэффициентов L.

Пусть ψ есть собственная функция с собственным значением E периодического оператора L, полученная в Параграфе 2.1, а именно, функция Бейкера–Ахиезера на кривой Γ, имеющая разложения (1.1.9) и (1.1.14) в точках p_- и p_+ соответственно. Очевидно, что разложение ψ в этих точках есть частный пример формальных рядов $\psi_\pm$. Как было описано выше в (1.2.3), построим операторы $L_m^\pm$, $(n, k+1) = 1$. В этом случае коэффициенты $L_n^{\pm}$ зависят есть функции на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$, и, следовательно, уравнение (1.2.9) есть корректно определенная динамическая система на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$.

1.2.3 Эволюция функции Бейкера–Ахиезера

Возникает естественный вопрос, как эволюционирует функция Бейкера–Ахиезера, построенная по оператору $L = L_{k+1}^{-}$, если имеет место место динамика (1.2.9) на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$. Предположим, что в каждый момент времени мы построили нормированный собственный вектор $\psi(t)$, т.е. $L(w)\psi(t) = E\psi(t)$. Из уравнения Лакса (1.2.9) следует, что вектор $\partial_{t_m^{\pm}}\psi(t) - L_m^{\pm}\psi(t)$ является собственным для оператора L с собственнм значением E. Ввиду единственности, следующей из Лемм 1.1.1,1.1.2, имеем

$$\partial_{t_m^{\pm}}\psi(t) - L_m^{\pm}\psi(t) = -f\psi(t), \tag{1.2.10}$$

где f — некоторая мероморфная функция. Заметим, что f имеет полюса порядка m в точках p_+ и p_-, поскольку из условия нормировки следует

$$f = \sum_{j=1}^{n} \left(L_m^{\pm}\right)_{1j}\psi_j.$$

Кроме того, из (1.2.10) f имеет полюса в дивизоре полюсов $\gamma_1(t), ...\gamma_g(t)$ и главную часть вида $\frac{\dot{\gamma}_i(t)}{z_{\gamma_i} - \gamma_i(t)}$, $i = \overline{1, g}$, здесь z_{γ_i} локальная координата в окретсности точки $\gamma_i(t)$. Введем новое обозначение Ψ, а именно

$$\Psi := e^{\int_0^t f(t)dt}\psi(t). \tag{1.2.11}$$

Тогда у Ψ нет полюсов в $\gamma_1(t), ...\gamma_g(t)$, но имеются в $\gamma_1(0), ...\gamma_g(0)$, т.е. дивизор полюсов новой пси–функции Ψ не зависит от времени. Поскольку f имеет полюса порядка m в точках $p_{\pm}$, то у Ψ существенные особенности в этих точках вида $e^{t(z^m + O(z^{m-1})}$. Также заметим, что Ψ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{t_m^{\pm}}\Psi = L_m^{\pm}\Psi. \tag{1.2.12}$$

Отметим, что именно функция вида (1.2.11) и уравнения (1.2.12) использовались для построения алгебро–геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода Кричевером.

1.2.4 Гамильтонианы уравнений треугольных редукций

Докажем, что динамические системы (1.2.9) являются гамильтоновыми. Более того, векторные поля $\partial_{t_m^{-}}$, связанные с нижнетреугольными редукциями, бигамильтоновые. Для этого предъявим в явном виде гамильтонианы и симплектические формы. Как было показано выше, $\widehat{\omega}^{(i)}$, $i = \overline{1, 2}$ являются симплетрическими при ограничении на симплектические листы Λ_i^c.

Теорема 1.2.1. *Векторное поле $\partial_{t_m^{\pm}}$, определенное уравнением Лакса (1.2.9), ограниченное на подмногообразие Λ_i^c является гамильтоновом для $i = 0, 1$ по отношении* *к формам $\widehat{\omega}^{(i)}$ с гамильтонианами*

$$H^{(0)}_{t^-_m} = res_{p_-} z^{-m} E(z_-)\, d\ln z_- = e_{m+k+1} \tag{1.2.13}$$

$$H^{(1)}_{t^-_m} = res_{p_-} z_-^{-m} \ln E(z_-)\, d\ln z_- \tag{1.2.14}$$

где $E(z_-)$ ряд (1.1.7) с коэффициентами, определенными в Лемме 1.1.1, и

$$H^{(i)}_{t^+_m} = \frac{1}{n} res_{p_+} E^{-m-i} \ln w(E) dE, \quad i = 0, 1 \tag{1.2.15}$$

и $w(E)$ определен в (1.1.8)

Доказательство.

1. Подставим векторное поле ∂_t в форму $\omega^{(i)}$

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{p_\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha}\Big(E^{-i}\langle\psi^+\partial_t L\delta\psi\rangle - \psi^+\delta L\partial_t\psi\Big) d\Omega.$$

   Воспользуемся уравнением Лакса $\dot{L} = [L, M]$, формулой для эволюции собственного вектора $\partial_t\psi = M\psi - f\psi$, видом дифференциала $d\Omega$ из (1.1.27). Тогда

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{p_\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha}\big(\langle\psi^+[M, L]\delta\psi\rangle - \langle\psi^+\delta L(M\psi - \psi f)\rangle\big)\frac{d\ln w}{nE^i\langle\psi^+\psi\rangle} \tag{1.2.16}$$

   Используя уравнение $(L - E)\delta\psi = -(\delta L - \delta E)\psi$, полученное варьированием уравнения $L\psi = E\psi$, преобразуем (1.2.16)

$$-\frac{1}{2}\sum_{p_\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha}\big(\langle\psi^+(M\delta E + \delta L f)\psi\rangle - \langle\psi^+(\delta L\, M + M\,\delta L)\psi\rangle\big)\frac{d\ln w}{nE^i\langle\psi^+\psi\rangle} \tag{1.2.17}$$

2. Второе слагаемое в (1.2.17) равняется нулю, поскольку выражение $\langle\psi^+(\delta L\, M + M\,\delta L)\psi\rangle\frac{d\ln w}{nE^i\langle\psi^+\psi\rangle}$ имеет полюса только в точках p_α. Значит

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{p_\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha}\langle\psi^+(2f + (M - f))\psi\rangle\frac{d\ln w}{nE^i\langle\psi^+\psi\rangle}.$$

3. Ввиду определения f выражение $\langle\psi^+(M - f)\psi\rangle = \langle\psi^+\partial_t\psi\rangle$ голоморфно в p_α. На Λ_i^c выражение $E^{-i}\delta E d\ln w$ голоморфно в p_α, следовательно $-\frac{1}{2}\langle\psi^+(M - f)\psi\rangle E^{-i}\frac{d\ln w}{\langle\psi^+\psi\rangle}$ не имеет вычетов в p_α. По тем же причинам и т.к. f имеет особенность либо в p_+, либо в p_-, то на Λ_i^c дифференциал $fE^{-i}d\ln w$ голоморфен в точках p_ℓ. Тогда

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = -\frac{1}{n}\sum_{p=p_\pm} \mathrm{res}_p f E^{-i} d\ln w.$$

4. Используем свойство $\delta \ln E dw = -\delta \ln w dE$ в точке p_+, тогда

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = \frac{1}{n}\mathrm{res}_{p_+} f(E)\delta \ln w(E) E^{-i} dE - \frac{1}{n}\mathrm{res}_{p_-} f(w) E^{-i}(w)\delta E(w) d\ln w. \quad (1.2.18)$$

Рассмотрим два случая: $t = t_m^-$ и $t = t_m^+$. Если $t = t_m^+$, то $f = E^{-m} + O(1)$ в окрестности p_+ и голоморфна в p_-, значит

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = \frac{1}{n}\mathrm{res}_{p_+}\delta \ln w(E) E^{-i-m} dE =: \delta H^i_{t_m^+}.$$

Если $t = t_m^-$, то $f = z^{-m} + O(1)$ в окрестности p_- и голоморфна в p_+, значит

$$\imath_{\partial_t}\omega^{(i)} = z^{-m}\delta E E^{-i}\frac{dz}{z} =: \delta H^{(i)}_{\partial_t}.$$

Теорема доказана.

$\square$

1.2.5 Нижнетреугольная динамика

Перейдем к конкретным примерам. А именно, рассмотрим нижнетреугольную динамику, т.е. динамику на пространстве $\mathscr{L}_{k+1}$, где в уравнении Лакса (1.2.9) присутствует оператор L_1^-, т.е.

$$\partial_{t_1^-} L = [L, L_1^-], \quad (1.2.19)$$

где $(L_1^-\psi)_i = v_i\psi_i + \psi_{i-1}$, $(L\psi)_i = a_i^1\psi_{i-1} + \ldots + a_i^k\psi_{i-k} + \psi_{i-k-1}$ и $v_i = \partial_{t_1^-}\varphi_i$. Данную динамическую ситему можно записать в следующем явном виде

$$\begin{cases} \partial_{t_1^-} a_i^1 = a_i^1(v_i - v_{i-j}) \\ \partial_{t_1^-} a_i^j = a_i^j(v_i - v_{i-j}) + a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}, \ j = \overline{2,k} \\ a_{i-1}^k - a_i^k = v_{i-k-1} - v_i. \end{cases} \quad (1.2.20)$$

на функции a_i^j. В случае $k = 1$ и $k = 2$ ниже будет построена гамильтонова теория.

1.2.5.1 Оператор порядка 2

Если L оператор порядка 2, т.е. $k = 1$, то естественными координатами на пространстве n периодических нижнетреугольных операторов порядка два $L = a_i T^{-1} + T^{-2}$ есть коэффициенты a_i. Специальные координаты $x_i := \xi_1^-(i)$ определяются с точностью до общего сдвига и константы e_1. Выражение для естественных координат через новые дается формулой

$$a_i = x_i - x_{i-2} + e_1 \quad (1.2.21)$$

Форма $\widehat{\omega}^{(0)}$ имеет вид

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \frac{1}{2}\langle da_i \wedge dx_{i-1}\rangle = \langle dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle, \quad (1.2.22)$$

здесь $de_1 = 0$ поскольку $\widehat{\omega}^{(0)}$ огранивние $\omega^{(0)}$ на Λ_0^c. Уравнения движения (1.2.20) упрощаются

$$\partial_{t_1^-}\varphi_{i-1} - \partial_{t_1^-}\varphi_{i+1} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - e^{\varphi_{i+1}-\varphi_i}. \tag{1.2.23}$$

Как было доказано выше в Теореме (1.2.1), векторное поле ∂_1^- является гамильтоновым по отношению к форме (1.2.22), и соответствующий гамильтониан равен

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = e_3.$$

Выразим e_3 в терминах новых координат. Из уравнения $L\psi = E\psi$ в точке p_- имеем

$$\begin{cases} \xi_2(i-2) + a_i\xi_1(i-1) = e_2 + \xi_1(i)e_1 + \xi_2(i) \\ \xi_3(i-2) + a_i\xi_2(i-1) = e_3 + e_2\xi_1(i) + e_1\xi_2(i) + \xi_3(i). \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Ранее при доказательстве Следствия 1 к Лемме (1.1.8) было отмечено, что в этом случае $e_2 = 0$ (можно получить и прямым вычислением). Выразим из последнего уравнения системы (1.2.24) коэффициент e_3 и усредним по периоду. Тогда

$$ne_3 = \langle a_i\xi_2(i-1) - e_1\xi_2(i)\rangle_i = \langle (x_i - x_{i-2})\xi_2(i-1)\rangle_i,$$

где в последнем равенстве была использована формула (1.2.21). Верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} ne_3 = \langle (x_i - x_{i-2})\xi_2(i-1)\rangle = \langle x_i\big(\xi_2(i-1) - \xi_2(i+1)\big)\rangle = \langle x_i\big(x_{i+1}e_1 - a_{i+1}x_i\big)\rangle = \\ = \langle x_i\big(x_{i+1}e_1 - x_i(x_{i+1} - x_{i-1} + e_1)\big)\rangle = \langle x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle + e_1\langle x_i(x_{i+1} - x_i)\rangle. \end{aligned}$$

Выясним вид формы $\omega^{(1)}$ и соответствующий гамильтониан для уравнения (1.2.23). Подставим в формулы (1.1.56) $k = 1$ и $e^{-\varphi_i} = (-1)^i\phi_{i-1}$. Тогда

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2}\langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i\rangle - \frac{1}{2}\langle (-1)^{i-1}e^{\varphi_{i-1}}de^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \wedge d\phi_{i-1}\rangle = \langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i\rangle. \tag{1.2.25}$$

Согласно Теореме 1.2.3

$$H^1_{t_1^-} = \operatorname{res}_{p_-} z_-^{-2}\ln E(z_-)dz_- = e_1 = \frac{1}{n}\langle a_i\rangle.$$

Учитывая вышесказанное, доказана следующая теорема:

Теорема 1.2.2. *Пусть $\mathscr{L}_2 = \{a_iT^{-1} + T^{-2} \mid a_{i+n} = a_i\}$ пространство периодических разностных строго нижнетреугольных операторов порядка 2.*

1. *Уравнение (1.2.23) на пространстве $\mathscr{L}_2$, при ограничении на Λ_0^c, является гамильтоновым по отношению к симплектической форме $\widehat{\omega}^{(0)} = \langle dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle$, где $a_i = x_i - x_{i-2} + e_1$, с соответствующим гамильтонианом*

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = \frac{1}{n}\langle x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle + \frac{e_1}{n}\langle x_i(x_{i+1} - x_i)\rangle. \tag{1.2.26}$$

2. *Уравнение (1.2.23) на пространстве $\mathscr{L}_2$, при ограничении на Λ_1^c, является га-*

мильтоновым по отношению к симплектической форме $\widehat{\omega}^{(1)} = \langle d\varphi_i \wedge d\varphi_{i+1} \rangle$, *где* $a_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$, *с соответствующим гамильтонианом*

$$H^1_{\partial_{t_1^-}} = \langle e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \rangle.$$

1.2.5.2 Оператор порядка 3

Рассмотрим случай $k = 2$, т.е. L оператор третьего порядка

$$(L\psi)_i = \psi_{i-3} + a_i^2 \psi_{i-2} + a_i^1 \psi_{i-1}.$$

В этом случае естественные координаты на пространстве $\mathscr{L}_3$ нижнетреугольных разностных периодических операторов порядка 3— набор $\{a_i^1, a_i^2\}_{i=1}^n$, а новые

$$x_i := \xi_1^-(i), \ y_i = \xi_2^-(i).$$

Форма

$$\omega^{(0)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{res}_{p_-} \langle \psi^+ \delta L \wedge \delta\psi \rangle \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \langle \zeta_1(i) \delta a_i^2 \wedge \delta x_{i-2} + \delta a_i^2 \wedge \delta y_{i-2} + \delta a_i^1 \wedge \delta x_{i-1} \rangle,$$

где $\zeta_1(i)$ коэффициент разложения ψ_i^* в окрестности точки p_- при z^{-i+1}. Ввиду (1.1.46)

$$\zeta_1(i) = -x_{i-1}.$$

Естественные координаты в терминах новых записываются в виде

$$a_i^{(1)} = y_i - y_{i-3} - (x_i - x_{i-3}) x_{i-2} + e_1 (x_i - x_{i-2}) + e_2 \tag{1.2.27}$$

$$a_i^{(2)} = x_i - x_{i-3} + e_1, \tag{1.2.28}$$

ввиду уравнений (1.1.10) и (1.1.13). Прямыми вычислениями можно показать, что выражение для формы $\omega^{(0)}$, ограниченной на лист, вдоль которого e_1 и e_2 постоянны:

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \langle\, dy_i \wedge (dx_{i-1} - dx_{i+2}) + d(x_{i-1} x_{i-2}) \wedge dx_i + e_1 dx_i \wedge dx_{i-1} \rangle \tag{1.2.29}$$

Непосредственными вычислениями доказывается следующая теорема

Теорема 1.2.3. *Уравнение (1.2.20) в случае* $k = 2$ *на пространстве* $\mathscr{L}_3$, *при ограничении на* Λ_0^c, *является гамильтоновым по отношению к симплектической форме (1.2.29) с соответствующим гамильтонианом*

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = \frac{1}{n} \langle\, y_{i-1}(y_i - y_{i-3}) \rangle + \frac{1}{n} \langle x_i x_{i-1} x_{i-2} (x_{i-1} - x_i) \rangle + \frac{e_1}{n} \langle (x_i^2 (x_{i-1} - x_{i+1}) \rangle \tag{1.2.30}$$

$$+ \frac{e_2}{n} \langle x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \rangle + \frac{1}{n} \langle y_i (x_{i+2}^2 - x_{i-1}^2 - x_{i+2} x_{i+1} + x_{i-2} x_{i-1} \big) \rangle.$$

Доказательство. Как было отмечено в Теореме 1.2.1, для $k = 2$

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = e_4.$$

Посчитаем e_4. Из уравнения $L\psi = E\psi$ следует

$$\begin{cases} \xi_2(i-3) - \xi_2(i) + a_i^2\xi_1(i-2) + a_i^1 = e_2 + e_1\xi_1(i) \\ \xi_3(i-3) - \xi_3(i) + a_i^2\xi_2(i-2) + a_i^1\xi_1(i-1) = e_2\xi_1(i) + e_1\xi_2(i) \\ \xi_4(i-3) - \xi_4(i) + a_i^2\xi_3(i-2) + a_i^1\xi_2(i-1) = e_4 + e_1\xi_3(i) + e_2\xi_2(i). \end{cases} \tag{1.2.31}$$

Просуммируем последнее уравнение системы по периоду

$$ne_4 = \langle a_i^2\xi_3(i-2) + a_i^1\xi_2(i-1) - e_2\xi_2(i) - e_1\xi_3(i)\rangle.$$

Подставляя формулы (1.2.27), имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} ne_4 = \langle y_{i-1}\big(y_i - y_{i-3} + x_{i-2}(x_{i-3} - x_i) + e_1(x_i - x_{i-2}) + e_2\big)\rangle + \\ +\langle(x_i - x_{i-3} + e_1)\xi_3(i-2)\rangle - \langle e_2y_i - e_1\xi_3(i)\rangle = \langle(x_i - x_{i-3})\xi_3(i-2)\rangle + \\ +\langle(y_i - y_{i-3})y_{i-1}\rangle + \langle x_{i-2}(x_{i-3} - x_i)y_{i-1}\rangle + e_1\langle(x_i - x_{i-2})y_{i-1}\rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение $\langle(x_i - x_{i-3})\xi_3(i-2)\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle(x_i - x_{i-3})\xi_3(i-2)\rangle = \langle x_{i-1}\big(\xi_3(i-3) - \xi_3(i)\rangle = \\ = \langle x_{i-1}\big(e_2x_i + e_1y_i - a_i^2y_{i-2} - a_i^1x_{i-1}\big)\rangle = \\ = e_2\langle x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + e_1x_{i-1}y_i - x_{i-1}y_{i-2}(x_i - x_{i-3} + e_1) - \\ -x_{i-1}^2(y_i - y_{i-3}) + x_{i-1}^2(x_i - x_{i-3})x_{i-2} - e_1x_{i-1}^2(x_i - x_{i-2}). \end{aligned}$$

Вышесказанное завершает доказательство теоремы. □

1.2.5.3 Произвольное k

В случае произвольного k имеет место следующая теорема

Теорема 1.2.4. *Уравнение (1.2.20), ограниченное на листы с зафиксированным w_ℓ, являются гамильтоновыми по отношению к форме (1.1.56). Соответствующий гамильтониан равен*

$$H^1_{\partial_{t_1^-}} = \langle a_i^{(k)}\rangle \tag{1.2.32}$$

Доказательство. Согласно Теореме 1.2.1 гамильтониан системы равен

$$H^1_{\partial_{t_1^-}} = \operatorname{res}_0 \ln E(z)z^{-2}dz = e_1 = \langle a_i^{(k)}\rangle, \tag{1.2.33}$$

где мы воспользовались (1.1.11). □

1.2.6 Верхнетреугольная динамика

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{t_1^+}L = [L, L_1^+], \tag{1.2.34}$$

где $(L_1^+\psi)_i = c_i\psi_{i+1}$, $c_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}}$ и $(L\psi)_i = a_i^1\psi_{i-1} + \ldots + a_i^k\psi_{i-k} + \psi_{i-k-1}$. Вид этой системы уравнений

$$\partial_{t_1^+}a_i^{j-1} = c_ia_{i+1}^j - c_{i-j}a_i^j,\ j = \overline{2,k}. \tag{1.2.35}$$

Если $k = 1$, то уравнение движения (1.2.34) принимают наиболее простой вид

$$\partial_{t_1^+}\varphi_i - \partial_{t_1^+}\varphi_{i-1} = e^{\varphi_{i-1}-\varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-2}-\varphi_i}. \tag{1.2.36}$$

Теорема 1.2.5. *Уравнение (1.2.34), ограниченное на листы с зафиксированным w_ℓ, являются гамильтоновыми по отношению к форме (1.1.56). Соответствующие гамильтониан*

$$H_{\partial_{t_1^+}} = \frac{1}{n} res_{E=0} \ln w(E) E^{-2} dE = w_1 = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2}-\varphi_i}\rangle, \tag{1.2.37}$$

где w_1 первый коэффициент разложения (1.1.8).

Доказательство.

$$n^{-1}\ln w = n^{-1}(\ln\psi_{-n} - \ln\psi_0) = \langle\psi_{i-1} - \psi_i\rangle \tag{1.2.38}$$

Тогда из (1.1.14) и (1.1.15) получаем, что

$$w_1 = \langle \xi_1^+(i-1) - \xi_1^+(i)\rangle = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2}-\varphi_i}\rangle \tag{1.2.39}$$

$\square$

Пример. Пусть $k = 1$, тогда $a_i^2 = 1$ и, следовательно,

$$H^1_{t_1^+} = -\langle e^{\varphi_{i-2}-\varphi_i}\rangle.$$

1.2.7 Обратная задача

Цель настоящего раздела — с помощью подхода к построению конечнозонных решений иерархии двумеризованной цепочки Тода, предложенного Кричевером, показать, как получить интересующие нас редукции и доказать, что кривая, с помощью которой получаются такие решения при наличии дополнительного условия существования мероморфных функций совпадает со спектральной кривой, полученной в первом разделе Главы 1.

Пусть Γ произвольная гладкая алгебраическая кривая рода g с двумя отмеченными точками $p_\pm$, в окресности которых заданы локальные координаты $z_\pm$, т.ч. $z_\pm(p_\pm) = 0$. Наиболее общий вид двухточечной динамической дискретной функции Бейкера–Ахиезера, дается следующей леммой:

Лемма 1.2.3. *([33]) Для произвольного набора g точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ существует единственная мероморфная функция $\Psi_i(t,p)$, $p \in \Gamma \setminus p_\pm$ такая, что :*

(i) вне отмеченны точек $p_\pm$ она имеет простые полюса в точках γ_s (если γ_s различны);

(ii) в окрестностях отмеченных точек она имеет вид

$$\begin{cases} \Psi_i(t,p) = z_-^i e^{(\sum_m t_m^- z_-^{-m})}\left(1 + \sum_{s=1}^\infty \xi_s^-(i,t)\ z_-^s\right), \ p \to p_- \\ \Psi_i(t,p) = z_+^{-i} e^{\varphi_i} e^{(\sum_m t_m^+ z_+^{-m})}\left(1 + \sum_{s=1}^\infty \xi_s^+(i,t)\ z_+^s\right), \ p \to p_+. \end{cases} \tag{1.2.40}$$

Функция Бейкера–Ахиезера $\Psi_i(t,p)$ может быть записана в терминах тэта–функции Римана многообразия Якоби, преобразования Абеля–Якоби и мероморфных дифференциалов, имеющих полюса в отмеченных точках $p_\pm$. Определим все нужные объекты. Пусть $a_j, b_j,\ j=\overline{1,g}$ канонический базис циклов на кривой Γ, т.е.

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

И пусть $\omega_j,\ j=\overline{1,g}$ соответствующий им базис нормированных голоморфных дифференциалов, т.е.

$$\oint_{a_j} \omega_k = \delta_{kj}.$$

Матричные элементы матрицы периодов определяются формулой

$$B_{jk} = \oint_{b_j} \omega_k.$$

Хорошо известно, что B является *римановой матрицей* (т.е. симметрической и с отрицательно определенной мнимой частью). Тогда тэта–функция Римана есть

$$\theta(z|B) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(m,z)+\pi i(Bm,m)},\ z\in\mathbb{C}^g.$$

Сходимость ряда в определении тэта–функции гарантируется отрицательной определенностью мнимой части матрицы периодов. Решетка вида

$$\{N+BM \mid N,M\in\mathbb{Z}^g\}\subset\mathbb{C}^g$$

называется решеткой, порожденной матрицей периодов B, причем ее ранг равен $2g$. Фактор–пространство $\mathbb{C}^g$ по данной решетке называется абелевы тором или *якобианом кривой* Γ и обозначается J_Γ. Отображение $\mathcal{A}_{p_0}$ из кривой Γ в ее якобиан, определенное формулой

$$p\to \Big(\int_{p_0}^{p}\omega_1,\dots,\int_{p_0}^{p}\omega_g\Big),\ \Gamma\to J_\Gamma,$$

где p_0 некоторая точка поверхности, называется *отображением Абеля. Нормированный Абелев дифференциалы третьего типа* $d\Omega_0$ — мероморфный дифференциал на Γ с нулевыми a–периодами, т.е. $\oint_{a_i} d\Omega_0 = 0$, имеющий простые полюса с вычетами ∓ 1 в точках $p_\pm$. *Нормированные абелевы дифференциалы второго рода* $d\Omega_{m,\pm}$— мероморфные дифференциалы на Γ, со свойствами $\oint_{a_i} d\Omega_{m,\pm}=0$ и имеющие единственные полюса в точках $p_\pm$ и соответствующее разложение вида $d\Omega_{m,\pm} = d(z_\pm^{-m}+O(z_\pm))$. Тогда имеет место теорема:

Лемма 1.2.4. *[33] Функция Бейкера-Ахиезера задается формулой*

$$\Psi_i(t,p) = \frac{\theta(A(p)+iU_0+\sum U_{m,\pm}t_m^\pm + Z)\,\theta(A(p_-)+Z)}{\theta(A(p_-)+iU_0+\sum U_{m,\pm}t_m^\pm + Z)\,\theta(A(p)+Z)}\, e^{i\Omega_0(p)+\sum t_m^\pm\Omega_{m,\pm}(p)} \tag{1.2.41}$$

Здесь суммирование идет по всем парам индексов $(m, \pm)$ *и:*

(i) $\Omega_0(p)$ *и* $\Omega_{m,\pm}(p)$ *абелевы интегралы,* $\Omega_0(p) = \int^p d\Omega_0,\ \Omega_{m,\pm}(p) = \int^p d\Omega_{m,\pm}$, *соответствующие дифференциалам, введенным выше и нормированным так, что в окрестности* p_- *они имеют вид*

$$\Omega_0(z_-) = \ln z_- + O(z_-),\ \Omega_{m,-}(z_-) = z_-^{-m} + O(z_-),\ \Omega_{m,+}(z_-) = O(z_-);$$

(ii) $2\pi i U_0$, $2\pi i U_{\alpha,j}$ *вектора b-периодов,т.е. вектора с координатами*

$$U_0^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} d\Omega_0,\ U_{m,\pm}^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} d\Omega_{m,\pm}; \qquad (1.2.42)$$

(iii) Z *-произвольный вектор, соответствующий дивизору полюсов функции Б.-А.*

Решение обратной задачи построения иерархии двумеризованной цепочки Тода дается следующей Теоремой:

Теорема 1.2.6. *([33]) Пусть* $\Psi_i(t,p)$ *- функция Бейкера-Ахиезера из Леммы 1.2.3, соответствующая произвольному набору данных* $\{\Gamma, p_\pm, z_\pm; \gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$. *Существуют единственный набор операторов* $L_m^\pm$ *такой, что выполняются уравнения*

$$\partial_{t_m^\pm}\Psi = L_m^\pm \Psi, \qquad (1.2.43)$$

здесь $L_m^\pm$ *– разностные операторы вида*

$$L_m^\pm = \sum_{j=0}^m a_{i,m}^{(j,\pm)} T^{\pm j} \qquad (1.2.44)$$

Замечание 1.2.1. *Сравнивая левую и правую части уравнения (1.2.43) в окрестности точек* $p_\pm$, *имеем*

$$a_{i,m}^{0,+} = 0,\ a_{i,m}^{m,+} = e^{\varphi_i - \varphi_{i+m}} \qquad (1.2.45)$$

и

$$a_{i,m}^{m,-} = 1,\ a_{i,m}^{0,-} = \partial_{t_m^-}\varphi_i. \qquad (1.2.46)$$

Из вида функции Бейкера–Ахиезера следует, что все потоки $\partial_{t_m} - L_m$ коммутирую, т.е. имеет место система уравнений Захарова–Шабата:

$$\partial_{t_k} L_m - \partial_{t_m} L_k - [L_m, L_k] = 0, \qquad (1.2.47)$$

где $t_k(t_m)$ либо $t_k^+(t_m^+)$,либо $t_k^-(t_m^-)$. Естественный вопрос нахождения решения φ_i иерархии двумеризованной цепочки Тода разрешает следующая теорема, доказательство которой основано на сравнении формул (1.2.40) и (1.2.41):

Теорема 1.2.7. *[33] Алгебро-геометрическое решение двумеризованной цепочки Тода дается формулой*

$$\varphi_i(t) = \ln \frac{\theta((i+1)U_0 + \sum U_{m,\pm} t_m^\pm + \widetilde{Z})}{\theta(iU_0 + \sum U_{m,\pm} t_m^\pm + \widetilde{Z})} + ic_0 + \sum c_{m,\pm} t_m^\pm \qquad (1.2.48)$$

где $\tilde{Z} = Z + A(p_+)$ произвольный вектор, вектора U_0 и $U_{m,\pm}$ определены в (1.2.42), а константы c_0 и $c_{m,\pm}$ являются старшими членами в разложении абелевых интегралов в окрестности p_-:

$$\Omega_0(z_+) = -\ln z_+ + c_0 + O(z_+), \tag{1.2.49}$$

$$\Omega_{m,+}(z_+) = z_+^{-m} + c_{m,+} + O(z_+),\ \Omega_{m,-}(z_+) = c_{m,-} + O(z_+)$$

С понятием функции Бейкера–Ахиезера связано понятие двойственной функции Бейкера Ахиезера. Для неспециального дивизора полюсов функции Бейкера–Ахиезера $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ степени g определим *двойственный* эффективный дивизор $D^+ = \gamma_1^+ + \dots + \gamma_g^+$ степени g следующим образом: существует единственный *мероморфный дифференциал* $d\Omega$ с простыми полюсами в точках $p_\pm$ и соответствующими вычетами ± 1, голоморфный всюду кроме $p_\pm$, имеющий нули в точках дивизора D : $d\Omega(\gamma_s) = 0$. Поскольку степень канонического класса(класс эквивалентности дивизора нулей голоморфного дифференциала на кривой Γ) равна $2g-2$, а полюсов два, тогда кроме g нулей в D, у дифференциала $d\Omega$ имеются еще g нулей, и выполняется уравнение

$$D + D^+ = \mathcal{K} + p_+ + p_-,$$

где $D^+ = \gamma_1^+ + \ldots + \gamma_g^+$ и $\mathcal{K}$ канонический класс. Верна следующая лемма–определение

Лемма 1.2.5. *Для неспециального дивизора $D^+ = \gamma_1^+ + \ldots \gamma_g^+$ существует единственная двойственная функция Бейкера–Ахиезера Ψ^+ на кривой Γ, имеющая следующие аналитические свойства*

(i) простые полюса в D^+;

(ii) разложение в окрестностях отмеченных точек

$$\begin{cases} \Psi_i^+(t,p) = z_-^{-i} e^{-\sum_m t_m^- z_-^{-m}} \left(1 + \sum_{s=1}^\infty \chi_s^-(i,t)\ z_-^s\right),\ p \to p_- \\ \Psi_i^+(t,p) = z_+^{i} e^{-\varphi_i} e^{\sum_m t_m^+ z_+^{-m}} \left(1 + \sum_{s=1}^\infty \chi_s^+(i,t)\ z_+^s\right),\ p \to p_+. \end{cases} \tag{1.2.50}$$

Аналогично тому, как были получены тэта–функциональные формулы для функции Бейкера–Ахиезера, доказывается формула для двойственной:

Лемма 1.2.6.

$$\Psi_i^+(t,p) = \frac{\theta(\mathcal{A}(p) - iU_0 - \sum U_{m,\pm} t_m^\pm + Z^+)\,\theta(\mathcal{A}(p_-) + Z^+)}{\theta(\mathcal{A}(p_-) - iU_0 - \sum U_{m,\pm} t_m^\pm + Z^+)\,\theta(\mathcal{A}(p) + Z^+)} \times e^{-i\Omega_0(p) - \sum t_m^\pm \Omega_{m,\pm}(p)} \tag{1.2.51}$$

где $Z + Z^+ = \mathcal{K} + \mathcal{A}(p_+) + \mathcal{A}(p_-)$.

Следующая Лемма дает понимание того, какому уравнению удовлетворяет Ψ_i^+ :

Лемма 1.2.7.

$$(\Psi^+ L)_i \equiv \Psi^+_{i+k+1} + a^{(k)}_{i+k}\Psi^+_k + \dots a^{(1)}_{i+1}\Psi^+_{i+1} = E\Psi^+_i\,, \tag{1.2.52}$$

Доказательство.

1. Несложно показать, что
$$\mathrm{res}_{p_\pm}\Psi^+_i\Psi_j d\Omega = \pm\delta_{ij}. \tag{1.2.53}$$

2. Ввиду единственности двойственной функции Бейкера–Ахиезера для некоторого набора $\widehat{a}^k_i, \dots \widehat{a}^1_i$ выполняется равенство
$$\Psi^+_{i+k+1} + \widehat{a}^{(k)}_i\Psi^+_k + \dots \widehat{a}^{(1)}_i\Psi^+_{i+1} = E\Psi^+_i\,,$$
поскольку в левой и правой части стоят выражения, имеющие одинаковые аналитические свойства.

3. Домножим последнее равенство на $\Psi_{i+1}d\Omega$ и перепишем правую часть в следующем виде
$$\begin{aligned}\big(\Psi^+_{i+k+1} + \widehat{a}^{(k)}_i\Psi^+_k + \dots \widehat{a}^{(1)}_i\Psi^+_{i+1}\big)d\Omega = E\Psi^+_i\Psi_{i+1}d\Omega = \\ = \Psi^+_i\big(\Psi_{i-k} + a^k_{i+1}\Psi_{i-k+1} + \dots + a^1_{i+1}\Psi_i\big)d\Omega.\end{aligned}$$
Взяв вычет в точке p_- и воспользовавшись свойством (1.2.53), получаем
$$\widehat{a}^1_i = a^1_{i+1}.$$
Аналогично доказывается равенство коэффициентов $\widehat{a}^k_i, \dots \widehat{a}^1_i$ требуемому.

□

Рассмотрим иерархию двумеризованной цепочки Тода (1.2.43), построенную по алгебраической кривой Γ, двум отмеченным точкам $p_\pm$ и дивизору полюсов $D = \gamma_1 + \dots \gamma_g$. Из (1.2.41) легко видеть, что коэффициенты операторов $L^\pm_m$ квазипериодические функции дискретного аргумента i. Следующее условие позволяет выделить среди таких операторов операторы с периодическими коэффициентами:

Лемма 1.2.8. *Если на кривой Γ существует мероморфная функция $w = w(p)$ с полюсом порядка n в точке p_- и нулем порядка n в точке p_+, тогда коэффициенты операторов $L^\pm_m$ из Теоремы 1.2.6 периодические функции дискретного аргумента i.*

Доказательство. Функция w определена с точностью до нормировки. Пусть коэффициент при z^{-n} разложения w в окрестности p_- равен 1. Рассмотрим выражение $w\Psi_i$. Оно имеет аналитические свойства функции Бейкера–Ахиезера Ψ_{i-n}. Ввиду единственности, имеем
$$\Psi_{i-n} = w\Psi. \tag{1.2.54}$$

□

Далее, зафиксируем одно из времен иерархии t^-_{k+1} и рассмотрим решение иерархии, не зависящее от времени t^-_{k+1}, т.е.

$$\partial_{t^-_{k+1}}\varphi_i = 0 \tag{1.2.55}$$

Тогда из формулы (1.2.46) следует, что в этом случае оператор $L := L^-_{k+1}$ становится строго нижнетреугольным, т.е. вида (1.1.1). Уравнения нулевой кривизны (1.2.47), где одно из времен $t_k = t$ можно записать как

$$\partial_{t_m} L = [L, L_m], \tag{1.2.56}$$

что есть искомое *представления Лакса.*

Лемма 1.2.9. *Если выполняется условие (1.2.55), тогда на кривой* Γ *существует функция* E*, имеющая полюс порядка* $k+1$ *в точке* p_-*, и регулярная в точке* p_+*. И выполняется уравнение*

$$L\Psi = E\Psi \tag{1.2.57}$$

Доказательство.

1. Из условия (1.2.55) следует, что b–периоды мероморфного дифференциала $d\Omega_{k+1,-}$ равны нулю (напомним, что a–периоды также равны нулю ввиду (1.2.48)). Следовательно $E(p) := \int^p d\Omega_{k+1,-}$ хорошо определенная мероморфная функция на кривой Γ с полюсом порядка $k+1$ в точке p_- и нулем в точке p_+.

2. Формулу для функции Бейкера–Ахиезера (1.2.41) можно записать как

$$\Psi_i(t,p) = \frac{\theta(A(p) + iU_0 + \sum' U_{m,\pm}t^{\pm}_m + Z)\,\theta(A(p_-)+Z)}{\theta(A(p_-) + iU_0 + \sum' U_{m,\pm}t^{\pm}_m + Z)\,\theta(A(p)+Z)}\, e^{i\Omega_0(p) + \sum' t^{\pm}_m\Omega_{m,\pm}(p) + t^-_{k+1}E(p)} \tag{1.2.58}$$

где в $\sum'$ пропущен член с t^-_{k+1}. Можно заметить, что в этом случае $\Psi = \tilde\Psi e^{t^-_{k+1}E(p)}$, где $\tilde\Psi$ не зависит от времени t^-_{k+1}. Откуда $\partial_{t^-_{k+1}}\Psi = E\Psi$ и, следовательно, справедлива формула (1.2.57).

□

Условие существования мероморфных функции $w(p)$ и $E(p)$ накладывает ограничение на класс кривых Γ, по которым строилась функция Бейкера–Ахиезера Ψ_i. Докажем, что такие кривые имеют уравнение (1.1.6):

Лемма 1.2.10. *Пусть на кривой* Γ *существует функция* $w(p)$ *с единственным полюсом порядка* n *в точке* p_- *и нулем порядка* n *в точке* p_+ *и функция* $E(p)$ *с единственным полюсом порядка* $k+1$ *в* p_- *и регулярная в* p_+*. Тогда кривая* Γ *имеет вид (1.1.6).*

Доказательство. Функции $w(p)$ и $E(p)$ задают вложение кривой Γ в $\mathbb{C}^2$ по правилу $p \to \big(w(p), E(p)\big)$. Потому, если функции связаны некоторым соотношение, то это соотношение и будет уравнением поверхности. Рассмотрим $k+1$ накрытие плоскости E и выражение

$$p(w, E) := \prod_{i=1}^{k+1}\big(w - w_j(E)\big),$$

где $w_j(E)$ – значение w на каждом из $k+1$ листов. Заметим, что $p(w)$ тождественно равно нулю. Это полином степени $k+1$ по w, коэффициенты которого есть симметрические функции переменных $w_j(E)$, и потому голоморфные по переменной E. В окрестности $E = \infty$ имеем $E = z^{-k-1}(1 + O(z))$ и $w = z^{-n}$, следовательно $\prod_j w_j(E) = \prod_j z^{-n(k+1)} = z^{-n(k+1)} = E^n(1 + O(E^{-1}))$. Следовательно, все члены в $p(w)$ кроме w^{k+1} и E^n имеют меньшую степень, чем $(k+1)n$. Что завершает доказательство Леммы.

□

Глава 2

Спектральная теория двумерного периодического оператора Шредингера.

2.1 Прямая задача

Основной целью Параграфа 2.1 является Теорема 2.1.2, где описан явный вид спектральной кривой двумерного периодического оператора Шредингера с положительным потенциалом, а так же описание свойств этой кривой. Пусть

$$\mathcal{H}_0 = -\Delta + u_0(x, y),\ u_0(x + 2\pi\ell_1, y) = u_0(x, y + 2\pi\ell_2) = u_0(x, y)$$

невозмущенный оператор Шредингера с произвольным гладким периодческим потенциалом, w_{10} произвольное отличное от нуля комплексное чило, а T_x и T_y — операторы сдвига аргумента x и y на $2\pi\ell_1$ и $2\pi\ell_2$ соответственно. Дадим определение

Определение 2.1.1. Набор функций ϕ_ν, являющихся решением уравнения $\mathcal{H}_0\phi_\nu = 0$ будет называться *базисным*, если выполняются следующие три условия:

1. каждая из функций этого набора квазипериодична по x и y, т.е.

   $$T_x\phi_\nu = w_{10}\phi_\nu,\ T_y\phi_\nu = w_{2\nu}\phi_\nu,$$

   где $w_{2\nu}$ некоторый набор комплексных чисел;

2. существует другой "двойственный" набор решений уравнения $\mathcal{H}_0\phi_\nu^+ = 0$ со свойством

   $$T_x\phi_\nu = w_{10}^{-1}\phi_\nu,\ T_y\phi_\nu^+ = w_{2\nu}^{-1}\phi_\nu^+$$

   и условием нормировки

   $$\langle \phi_{\nu y}\phi_\mu^+ - \phi_\nu\phi_{\mu y}^+ \rangle = r_\nu\delta_{\nu,\mu},\ r_\nu \neq 0;$$

3. для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ со свойством

   $$T_x f(x) = w_{10} f(x)$$

следующие ряды сходятся и равны

$$0 = \sum_\nu \frac{\langle \phi_\nu^+ f\rangle_x}{r_\nu}, \tag{2.1.1}$$

$$f(x) = \sum_\nu \frac{\langle \phi_\nu^+ f\rangle_x}{r_\nu}\phi_{\nu y} = -\sum_\nu \frac{\langle \phi_{\nu y}^+ f\rangle_x}{r_\nu}\phi_\nu. \tag{2.1.2}$$

2.1.1 Явные формулы

В случае u_0 константы, приведем несколько формул, дающих понимание, что такое кривая Ферми и множество Блоха–Флоке (определенные во Введении), базисной последовательности.

Если $u_0(x,y) = \lambda$ постоянная функция, тогда блоховские решения уравнения $\mathcal{H}_0\phi = 0$:

$$\phi(z,\bar z,k) = e^{kz - k^{-1}\frac{\lambda}{4}\bar z} \tag{2.1.3}$$

параметризуются ненулевым комплексным параметром $k \in \mathbb{C}^*$. В этом случае $\Gamma_0^F(\mathcal{H}_0)$ есть $\mathbb{C}^*$. Для множителей Блоха–Флоке имеют место формулы

$$w_1(k) = e^{2\pi(k - k^{-1}\frac{\lambda}{4})\,\ell_1}, \quad w_2(k) = e^{2\pi i(k + k^{-1}\frac{\lambda}{4})\,\ell_2}, \tag{2.1.4}$$

и определено отображение $W : \Gamma_0^F(\mathcal{H}_0) \longmapsto (\mathbb{C}^*)^2$ по правилу

$$k \longmapsto (w_1(k), w_2(k)).$$

Тогда множество Блоха–Флоке определяется как образ $\Gamma_0^F(\mathcal{H}_0)$ при этом отображении:

$$\Gamma_0^{\mathrm{BF}}(\mathcal{H}_0) := \{(w_1,w_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \exists k \in \mathbb{C}^* w_1(k) = w_1 \text{ and } w_2(k) = w_2\}.$$

Особенности кривой $\Gamma_0^{\mathrm{BF}}(\mathcal{H}_0)$ – это точки самопересечения, являющиеся образами пар "резонансных" точек k, k', где резонансные точки определяются парой уравнений

$$w_i(k) = w_i(k'),\ i = \overline{1,2}.$$

Пары резонансных точек параметризуются целыми числами n, m, одновременно не обращающихся в ноль, и находятся из уравнений

$$k - \frac{\lambda}{4k} - \left(k' - \frac{\lambda}{4k'}\right) = \frac{in}{\ell_1},\ k + \frac{\lambda}{4k} - \left(k' + \frac{\lambda}{4k'}\right) = \frac{m}{\ell_2}.$$

Решая последнее уравнение, получаем $k = k_{n,m}^{\pm}$ and $k' = k_{-n,-m}^{\mp}$, где

$$k_{nm}^{\pm} := \frac{m\ell_1 + in\ell_2}{4\ell_1\ell_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda\ell_1^2\ell_2^2}{m^2 l_1^2 + n^2 l_2^2}}\right). \tag{2.1.5}$$

Тогда нодальные точки $\big(w_1(k^{\pm}_{n,m}, w_2(k^{\pm}_{n,m})\big)$ кривой Блоха–Флоке $\Gamma_0^{\mathrm{BF}}(\mathcal{H}_0)$ имеют вид

$$\begin{cases} w_1(k^{\pm}_{n,m}) = \exp(\pi i n \pm \frac{\pi m \ell_1}{\ell_2}\sqrt{1-\frac{4\lambda\ell_1^2\ell_2^2}{m^2\ell_1^2+n^2\ell_2^2}}), \\ w_2(k^{\pm}_{n,m}) = \exp(\pi i m \mp \frac{\pi n \ell_2}{\ell_1}\sqrt{1-\frac{4\lambda\ell_1^2\ell_2^2}{m^2\ell_1^2+n^2\ell_2^2}}). \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Кроме того, если для некоторых целых чисел $\tilde{n}, \tilde{m}$ выполняется условие

$$\frac{\tilde{m}^2\ell_1^2+\tilde{n}^2\ell_2^2}{4\ell_1^2\ell_2^2} = \lambda, \tag{2.1.7}$$

то у кривой Блоха–Флоке имеется четырехкратная особая точка. Рассмотрим произвольную точку $k_0 \in \Gamma_0^{\mathrm{F}}(\mathcal{H}_0)$, образ на кривой Блоха–Флоке которой есть (w_{10}, w_{20}). Тогда точки кривой Ферми, определяющие базисную последовательность фунций и являющиеся решением уравнения $w_1(k_\nu) = w_{10}$ имеют вид

$$k_\nu = \frac{in}{2\ell_1} + \frac{1}{2}\left(k_0 - \frac{\lambda}{4k_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{in}{\ell_1} + \left(k_0 - \frac{\lambda}{4k_0}\right)\right)^2 + \lambda}. \tag{2.1.8}$$

и нумеруются индексом $\nu = (n, \pm)$, состоящем из целого числа и знака. Соответствующие базисные функции $\phi_\nu := \phi(x, y, k_\nu)$, $\phi_\nu^+ = \phi(x, y, -k_\nu)$, $w_{2\nu} := w_2(k_\nu)$, $r(k_\nu) = 4\pi i \ell_1 \left(k_\nu + \frac{\lambda}{4k_\nu}\right)$.

Замечание 2.1.1. *В работе [51] отмечено, что по самому определению совокупность базисных функций переопределена. И потому, нельзя однозначно разложить функцию f по $\psi_\nu(x, y)$ или $\psi_{\nu y}(x, y)$. В тоже время для любой пары функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ квазипериодичных по x с множителем w_{10}, существует единственный набор констант $c_\nu(y)$, т.ч.*

$$f_1(x, y) = \sum_\nu c_\nu(y)\psi_{\nu y}(x, y), \;\; f_2(x, y) = \sum_\nu c_\nu(y)\psi_\nu(x, y),$$

причем из определения базисной последовательности следуют формулы для $c_\nu(y)$

$$c_\nu(y) = \frac{\langle f_1\psi_\nu^+ - f_2\psi_{\nu y}^+\rangle_x}{r_\nu}$$

2.1.2 Построение формального решения уравнения $(\mathcal{H}_0 + \delta u)\tilde{\phi} = 0$ из решений уравнения $\mathcal{H}_0\phi = 0$

В нерезонансном случае ($w_{20} \neq w_{2\nu}$, $\nu \neq 0$) и резонансном построим решение уравнения $(\mathcal{H}_0 + \delta u)\tilde{\phi} = 0$ из решений уравнения $\mathcal{H}_0\phi = 0$

Лемма 2.1.1. *[51] Если выполнено условие отсутствия резонансов, т.е.*

$$w_{20} \neq w_{2\nu}, \tag{2.1.9}$$

то для любой непрерывно дифференцируемой функции $\delta u(x,y)$, со свойством периодичности

$$T_x \delta u(x,y) = T_y \delta u(x,y) = \delta u(x,y),$$

существуют единственные формальные ряды

$$F(y,P_0) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(y,P_0)$$

и

$$\Phi(x,y,P_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s(x,y,P_0),\ \varphi_0 := \phi_0(x,y),\ \varphi_s = \sum c_\nu^s(y)\psi_\nu(x,y)$$

такие, что выполнено уравнение

$$\big(\mathcal{H}_0 + \delta u(x,y)\big)\Phi = 2F\Phi_y + \big(F_y + F^2\big)\Phi,$$

условия квазипериодичности

$$T_x\Phi(x,y,P_0) = w_{10}\Phi(x,y,P_0),\ T_y\Phi(x,y,P_0) = w_{20}\Phi(x,y,P_0)$$

условия нормировки

$$\langle \Phi_y\phi_0^+ - \phi\phi_{0y}^+\rangle_x + F\langle\Phi\phi_0^+\rangle_x = r_0 = \langle\phi_{0y}\phi_0^+ - \phi_0\phi_{0y}^+\rangle_x.$$

Доказательство элементарно и основано на подстановках рядов в уравнение и последовательном определении коэффициентов этих рядов. Приведем формулы:

$$F_s = r_0^{-1}\langle\phi_0^+\delta u\varphi_{s-1}\rangle_x, \tag{2.1.10}$$

$$c_0^0 = 1, c_0^s = -r_0^{-1}\sum_{i=1}^{s} F_i\langle\phi_0^+\varphi_{s-i}\rangle_x,\ s \geq 1. \tag{2.1.11}$$

Для $\nu \neq 0$ $c_\nu^0 = 0$, при $s \geq 1$

$$c_\nu^s = \frac{w_{2\nu}}{r_\nu(w_{2\nu} - w_{20})}\int_y^{y+2\pi\ell_2}\langle\phi_\nu^+\Big(-\delta u(x,y)\varphi_{s-1} + \sum_{i=1}^{s} 2F_i\varphi_{s-i,y}\Big)\rangle_x + \tag{2.1.12}$$

$$+\frac{w_{2\nu}}{r_\nu(w_{2\nu} - w_{20})}\int_y^{y+2\pi\ell_2}\langle\phi_\nu^+\Big(F_{iy}\varphi_{s-i} + \sum_{l=1}^{s-i} F_iF_l\varphi_{s-i-l}\Big)\Big\rangle,$$

где

$$\phi_\nu^+ = \phi(x,y,-k_\nu),\quad r_\nu = r(k_\nu),\quad r(k_\nu) := 4\pi i\ell_1\left(k_\nu + \frac{\lambda}{4k_\nu}\right). \tag{2.1.13}$$

Лемма 2.1.2. *[51] Формула*

$$\tilde{\phi}(x,y,P_0) = e^{\int_0^y F(y',P_0)dy'}\Phi(x,y,P_0)\Phi^{-1}(0,0,P_0) \tag{2.1.14}$$

определяет формальное блоховское решение возмущенного уравнения Шредингера

$$\big(\mathcal{H}_0 + \delta u(x,y)\big)\tilde{\phi}(x,y,P_0) = 0$$

со свойствами квазипериодичности

$$T_x\tilde{\phi}(x,y,P_0) = w_{10}\tilde{\phi}(x,y,P_0),\ T_y\tilde{\phi}(x,y,P_0) = \tilde{w}_{20}\tilde{\phi}(x,y,P_0),$$

где

$$\tilde{w}_{20} = w_{20}e^{\int_0^{2\pi\ell_2} F(y',P_0)dy'}.$$

Если же не выполняется условие (2.1.9), то формально–блоховское решение аналогично можно построить. Причем, все формулы будут являться матричными аналогами формул из Леммы 2.1.1.

Лемма 2.1.3. *Пусть существует такой набор I, для которого*

$$w_{2\mu} = w_{2\mu'},\ \forall \mu, \mu' \in I.$$

Существует единственный матричный формальный ряд

$$F(y,w_{10}) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s(y,w_{10}),\ F = F^{\alpha}_{\beta},\ \alpha,\beta \in I,$$

такой, что компоненты Φ^α, $\alpha \in I$ вектора $\vec{\Phi}$ — решения уравнения

$$(\mathcal{H}_0 + \delta u(x,y))\Phi^\alpha = 2F^\alpha_\beta \Phi^\beta_y + \big(F^\alpha_{\beta y} + F^\alpha_{\beta'}F^{\beta'}_\beta)\Phi^\beta,$$

удовлетворяющие условиям квазипериодичности

$$T_x\Phi^\alpha(x,y,w_{10}) = w_{10}\Phi^\alpha(x,y,w_{10}),\ T_y\Phi^\alpha(x,y,w_{10}) = w_{2\alpha}\Phi^\alpha(x,y,w_{10})$$

и условиям нормировки

$$\langle \Phi^\alpha_y \phi^+_\beta - \Phi^\alpha \phi^+_{\beta y}\rangle + \sum_{\mu \in I} F^\alpha_\mu \langle \Phi^\mu \phi^+_\beta \rangle_x = \delta_{\alpha\beta} r_\alpha.$$

Пусть $T(y,w_{10})$ — матрица, определенная уравнением

$$\partial_y T + TF = 0,\ T^\alpha_\beta(0,w_{10}) = \mathrm{Id}. \tag{2.1.15}$$

Решение уравнения (2.1.15) можно искать в виде ряда

$$T(y,w_{10}) = \sum_s T_s(y,w_{10}),$$

где каждый следующий T_s находится рекуррентно. Компоненты вектора $\hat{\Phi} = T\Phi$ являются решениями уравнения $\big(\mathcal{H}_0 + \delta u(x,y)\big)\hat{\Phi} = 0$, т.ч. при сдвиге на период по

x они умножаются на w_{10}, но не являющиеся блоховскими при сдвиге на период по y :

$$T_y\hat{\Phi}^\alpha(x,y,w_1) = \hat{T}^\alpha_\beta(w_1)w_{2\beta}\hat{\Phi}^\beta,\ \hat{T}(w_1) = T(2\pi\ell_2, w_1). \tag{2.1.16}$$

Таким образом совокупность $\hat{\Phi}^\alpha$ квазиблоховская, поскольку она инварианта при сдвигах на периоды по двум аргументам. Если рассмотреть "секулярное" уравнение

$$\det\bigl(\tilde{w}_2\delta^\alpha_\beta - \hat{T}^\alpha_\beta(w_1)w_{2\beta}\bigr) = 0, \tag{2.1.17}$$

возникающее обычно в теории возмущений кратных собственных значений, и собственный вектор $h_\alpha(w_{10},\tilde{w}_2)$ матрицы $\hat{T}^\alpha_\beta(w_1)w_{2\beta}$, нормированный таким образом, что

$$\sum_\alpha h_\alpha(\tilde{Q})\hat{\Phi}^\alpha(0,0,w_1) = 1,\ \tilde{Q} = (w_1,\tilde{w}_2),$$

тогда $\tilde{\phi}(x,y,\tilde{Q}) = \sum_\alpha h_\alpha(Q)\hat{\Phi}^\alpha(x,y,w_1)$ есть блоховское решение уравнения $\bigl(\mathcal{H}_0 + \delta u\bigr)\tilde{\phi}(x,y,\tilde{Q}) = 0$ с блоховскими множителями w_1 и $\tilde{w}_2$. Здесь $\tilde{w}_2$ есть корень характеристического уравнения. Приведем формулы первых членов разложения матрицы $\tilde{T} = \hat{T}^\alpha_\beta w_{2\beta}$, которые понадобятся нам в дальнейшем

$$(\tilde{T}_0)^\beta_\alpha = w_{2\beta}\delta^\beta_\alpha;\ (\tilde{T}_1)^\beta_\alpha = \frac{w_{2\beta}}{r_\beta}\int_0^{2\pi\ell_2}\langle\phi^+_\beta v\phi_\alpha\rangle_x\,dy' \tag{2.1.18}$$

2.1.3 Риманова поверхность блоховских функций

Приведем результаты работы [51], которые помогут нам понять устройство кривой Ферми. Пусть $R^\pm_{n,m}$ и $R^\mp_{-n,-m}$ окрестности резанансных точек $k^\pm_{n,m}$ и $k^\mp_{-n,-m}$ из (2.1.5), выбранные таким образом, чтобы для любого $k_0 \notin R^\pm_{n,m}, \tilde{R}^\mp_{-n,-m}$ имели место

$$|w_{20}w_{2\nu}^{-1} - 1| > h,\ |w_{20}^{-1}w_{2\nu} - 1| > h$$

для некоторого h, здесь $w_{20} := w_2(k_0)$ и $w_{2\nu} = w_2(k_\nu)$ и k_ν определяются формулой (2.1.8). Смысл h заключается в том, чтобы эти окрестности не пересекались. Имеет место лемма

Лемма 2.1.4. *[51] Существует константа N_0 такая, что для k_0, не принадлежащим окрестностям $R^\pm_{n,m}, R^\mp_{-n,-m}$ и удовлетворяющих условию*

$$|k_0| + |k_0^{-1}| > N_0$$

ряды теории возмущений из Леммы 2.1.1 сходятся и определяют блоховское решение уравнения $(\mathcal{H}_0 + \delta u(x,y))\tilde{\phi}(x,y,k_0) = 0$, аналитическое по x,y,k_0 и не обращающееся в ноль.

Для $k_0 \in R^\pm_{nm}$ и такого, что $|k_0| + |k_0^{-1}| > N_0$ в качестве множества резонансных индексов выберем пару индексов: $\nu = 0$ и ν_0 такое, что $k_{\nu_0} \in R^\mp_{-n,-m}$. Тогда для $w_{10} \in W^\pm_{n,m} = w_1(R^\pm_{n,m}) = w_1(R^\mp_{-n,-m})$ доказано, что формальные ряды из Леммы

2.1.3, задающие двумерное квазиблоховские решение уравнения Шредингера, равномерно и абсолютно сходятся. Матрица монодромии $\hat{T} = T(2\pi\ell_2, w_{10})$ определяет двулистное накрытие $\hat{R}^{\pm}_{n,m}$ над областью $W^{\pm}_{n,m}$, имеющее внутри этой области две точки ветвления. Назовем резонансную пару отмеченной, если дискриминант характеристического уравнения имеет один двукратный ноль, т.е. если $\hat{R}^{\pm}_{n,m}$ сингулярна.

Лемма 2.1.5. *Для неотмеченных резонансных точек $k^{\pm}_{nm}$ блоховская функция $\tilde{\phi}(x, y, k_0)$ аналитически продолжается на риманову поверхность $\hat{R}^{\pm}_{n,m}$, где имеет один простой полюс. Для отмеченных резонансных точек блоховская функция $\tilde{\phi}(x, y, k_0)$ продолжается аналитически из нерезонансной области в области $R^{\pm}_{n,m}$ и $R^{\mp}_{-n,-m}$.*

Область R_0, где выполняется неравенство $|k_0| + |k_0^{-1}| \leq N_0$ называется *центральной резонансной областью,* и в [51] доказывается, что $\tilde{\phi}(x, y, k_0)$ может быть продолжена внутрь R_0, заменяемую на конечноллистное накрытие $\hat{R}_0$ области $W_0 = w_1(R_0)$. Таким образом, приведенные результаты позволяют описать глобальную структуру Γ_λ. А именно, это поверхность, полученная вклейкой $\hat{R}_0$ вместо R_0; $\hat{R}^{\pm}_{n,m}$ вместо вырезанных окрестностей неотмеченных резонансных точек. Если число неотмеченных пар конечно, то Γ_λ имеет конечный род и компактифицируется двумя отмеченными точками. Соответствующие потенциалы называются алгебро–геометрическими (или конечнозонными) на нулевом уровне энергии. Окончательно, имеет место следующая теорема

Теорема 2.1.1. *([51]) Риманова поверхность Γ_λ изоморфна спектральной кривой Ферми $\Gamma^F_0(\mathcal{H}_0 + \delta u)$. Блоховское решение уравнения $(\mathcal{H}_0 + \delta u)\tilde{\phi}(x, y, p) = 0$, $p \in \Gamma_\lambda$ с условием нормировки $\tilde{\phi}(0, 0, p) = 1$ мероморфно на Γ_λ, причем полюсы $\tilde{\phi}$ не зависят от переменных x и y. В каждой из областей $R^{\pm}_{n,m}$ функция $\tilde{\phi}$ имеет по одному простому полюсу, в то время как в $\hat{R}_0$ у нее g_0 полюсов, где g_0 некоторое натуральное число, равное роду R_0, если $\hat{R}_0$ не особая. Вне $\hat{R}_0$, $\hat{R}^{\pm}_{n,m}$ функция $\tilde{\phi}$ голоморфна.*

Следующая Лемма понадобится при доказательстве Теоремы 2.1.2 и говорит нам о том, какое количество неподвижных точек у антиинволюции $\sigma\tau$ кривой $\Gamma^{\mathrm{F}}(\mathcal{H}_{>0})$, где положительный оператор $\mathcal{H}_{>0}$ определяется формулой $\mathcal{H}_{>0} = -\Delta + u(x, y), u > 0$:

Лемма 2.1.6. *Антиинволюция $\sigma\tau$ ферми-кривой $\Gamma^F(\mathcal{H}_{>0})$ положительного потенциала не имеет неподвижных точек.*

Доказательство. Предположим, что на кривой Γ^{F} существует неподвижная точка $\sigma\tau(p) = p$. Рассмотрим функцию $\phi = \phi(x, y, p)$. По определению, она является блоховским решением уравнения $\mathcal{H}_{>0}\phi = 0$. Умножим левую часть уравнения на двойственную блоховскую функцию ϕ^σ и проинтегрируем по тору полученную периодическую функцию переменных x, y (она периодична в силу того, что множители Флоке ϕ^σ обратны множителям Флоке ϕ). Интегрирование по частям дает равенство

$$\int_0^{2\pi\ell_1}\int_0^{2\pi\ell_2} (\partial_x\phi\partial_x\phi^\sigma + \partial_y\phi\partial_y\phi^\sigma + u\phi\phi^\sigma)\, dxdy = 0. \qquad (2.1.19)$$

Поскольку $\phi^\sigma(x,y,p) = \bar{\phi}(x,y,p)$ и $u > 0$, то левая часть равенства строго положительна. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы, что одновременно завершает доказательство теоремы. $\square$

2.1.4 Риманова поверхность блоховских функций в случае положительных потенциалов

Риманова поверхность функции $k(p)$, где

$$p(k) := \frac{\ln w_1(k)}{2\pi\ell_1} = k - \frac{\lambda}{4k}. \tag{2.1.20}$$

— двулистное накрытие комплексной p-плоскости с двумя точками ветвления $\pm p_0 = \pm\sqrt{-\lambda}$. В случае отрицательных значений $\lambda < 0$ данную поверхность можно представлять как два склеенных экземпляра p плоскости с разрезом вдоль вещественной оси между точками ветвления $\pm p_0$. При склейке верхний (нижний) берег разреза на одном листе отождествляется с нижним (верхним) берегом разреза на втором листе. В этом случае инволюция σ переводит квазиимпульс p в $-p$ на том же листе, в свою очередь антиинволюция τ переводит квазиимпульс p, лежащего на одном листе, в $\bar{p}$, на другом листе.

Определение 2.1.2. Набор данных $\mathcal{P}$, состоящего из

- вещественного числа $p_0 > 0$,
- конечного или бесконечного числа пар $p^j_{n,m}$, т.ч. выполняются равенства

  $$p^1_{n,m} = -p^2_{-n,-m},\ p^2_{n,m} = -p^1_{-n,-m}$$

  и

  $$\operatorname{Im} p^j_s = \frac{n}{2\ell_1},\ \left|p^j_s - p(k^{\pm}_{n,m})\right| = o\left(\frac{1}{n^2\ell_2^2 + m^2\ell_1^2}\right)$$

и отрезки $[p^1_{n,m}, p^2_{n,m}]$, параллельные веществнной оси, не пересекаются, будем называть *допустимым.*

Для каждого допустимого набора $\mathcal{P}$ построим риманову поверхность $\Gamma(\Pi)$ из двух копий комплексной p-плоскости с разрезами между точками p_0 и $-p_0$ на обоих листах и вдоль отрезков $[p^1_s, p^2_s]$ на первом листе и отрезков $[\bar{p}^1_s, \bar{p}^2_s]$ на втором листе, отождествляя верхний (нижний) берег разреза между p_0 и $-p_0$ на первом листе с нижним (верхним) берегом разреза на втором листе и отождествляя верхний (нижний) берег разреза $[p^1_s, p^2_s]$ на первом листе с нижним (верхним) берегом разреза $[\bar{p}^1_s, \bar{p}^2_s]$ на втором листе. После склейки каждому из разрезов соответствует нетривиальный цикл на поверхности $\Gamma(\mathcal{P})$. Обозначим их через a_0 и a_s, соответственно.

Теорема 2.1.2. *Для любого вещественного положительного периодического потенциала $u(x,y) > 0$, аналитически продолжимого в окрестность вещественных x, y, блоховские решения уравнения $(-\Delta - \lambda + v)\tilde{\phi} = 0$ параметризуются точками* *римановой поверхности* $\Gamma(\mathcal{P})$ *для некоторого допустимого набора* $\mathcal{P}$*. Соответствующая функция* $\tilde{\phi}$ *мероморфна и имеет по одному простому полюсу на каждом из циклов* a_s*.*

Доказательство.

1. Для $\lambda < 0$ координаты всех точек самопересечения $w_i(k^{\pm}_{nm})$ вещественны. Как уже говорилось выше, для достаточно малых ε множество резонансных индексов состоит из двух элементов, которые можно отождествить с $(n, m, \pm)$ и $(-n, -m, \mp)$. Непосредственно проверяется, что имеют место равнства:
$$\phi(k^{\pm}_{n,m}) = \overline{\phi(k^{\mp}_{-n,-m})},\ \phi^{+}(k^{\pm}_{n,m}) = \overline{\phi(k^{\pm}_{-n,-m})}, r^{\pm}_{n,m} = \overline{r^{\mp}_{-n,-m}} \tag{2.1.21}$$
где $r^{\pm}_{n,m} := r(k^{\pm}_{n,m})$, а функция $r(k)$ определена равенством (2.1.13). Из (2.1.21) и формулы (2.1.18) для $w_{10} = w_1(k^{\pm}_{n,m,})$ получим, что матрица монодромии имеет вид
$$\tilde{T}(w_1(k^{\pm}_{nm})) = w_2(k^{\pm}_{nm}) \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \bar{\kappa} & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \tag{2.1.22}$$
где $\kappa = (r^{\mp}_{-n,-m})^{-1} \langle\langle \phi^{+}(k^{\mp}_{-n,-m}) v \phi_(k^{\pm}_{n,m} \rangle\rangle$, а в равенстве диагональных элементов 1 мы использовали то, что среднее от v равняется нулю.

2. Из (2.1.22) следует, что собственные значений матрицы $\tilde{T}(w_1(k^{\pm}_{nm}))$ вещественны и различны в первом порядке по ε. Тогда, так как ферми-кривая инвариантна относительно τ, то они обязаны быть вещественными во всех порядках. Иными словами в окрестности каждой неотмеченная пары резонансных точек возникает "запрещенная" зона – неподвижный овал антиинволюции τ. Так как дивизор полюсов блоховской функции инвариантен относительно τ, а в окрестности резонансной пары имеется один полюс, то он лежит на соответствующем овале a_s. Теорема доказана для потенциалов вида $u = -\lambda + v$ для $\lambda < 0$ и достаточно малого возмущения v.

3. Осталось доказать, что установленные свойства ферми-кривой и дивизора полюсов блоховской функции остаются устойчивыми при деформации u, оставляющей потенциал положительным. Инвариантность Γ^{F} относительно σ и τ гарантирует, что описанная струтура может измениться только: (i) при слиянии a_s для различных s (в этот момент Γ^{F} будет иметь особенность); (ii) при возникновении на кривой Γ^{F} пары резонансных точек p, p', в которых $w_i(p) = w_i(p')$, неподвижных относительно антиинволюции $\sigma\tau$, т.е. $|w_i(p)| = 1$. Аргументы, полностью идентичные тем, которые использовались при доказательстве Теоремы 2.2 работы [51], доказывают, что периодичность потенциала (выражающаяся в том, что на Γ^{F} определены функции $w_i(p)$) является препятствием к слиянию циклов a_s. Препятствием к возникновению особенностей типа (ii) является Лемма 2.1.6.

$\square$

2.2 Обратная задача

Напомним, что обратная задача заключается в восстановлении оператора по некоторому набору спектральных данных. Приведенная ниже „обобщенная конструкция Веселова–Новикова“является обобщением хорошо известной конструкции работы [46], восстанавливающей вид потенциала двумерного оператора Шредингера

$$\mathcal{H} := -\Delta + u(x, y).$$

Обобщение заключается в том, что добавляются дополнительные пары неподвижных точек инволюции σ, в которых значения функции Бейкера–Ахиезера совпадают. Параграф 2.2 устроен следующим образом. Мы

- определим „спектральные данные“и функцию Бейкера–Ахиезера для двумерного оператора Шредингера;
- докажем, что функция Бейкера–Ахиезера является решением двумерного уравнения Шредингера;
- выведем формулу для функции Бейкера–Ахиезера в терминах подходящей тэта–функции Прима и формулу для соответствующего потенциала. Если наложить дополнительные условия, то полученный потенциал — периодическая функция своих аргументов;
- выведем формулы для дифференциала с полюсами в точках ветвления σ и нулями в полюсах $\phi(x, y, p)$ и $\phi(x, y, \sigma(p))$;
- расмотрим необходимые и достаточные условия для того, чтобы потенциал был вещественной функцией и пару достаточных условий неособости потенциала;
- рассмотрим простейший пример гиперэллиптической кривой, для которой соответствующий оператор Шредингера имеет n собственных функций;
- рассмотрим систему Лагранжевых уравнений с условием самосогласования, связанную с уравнением Шредингера.

2.2.1 Спектральные данные

Рассмотрим комплексную гладкую кривую $\mathscr{T}$, имеющую инволюцию σ с $(n+1)$–парой неподвижных точек $P_\pm$, $p^i_\pm$, $i = 1, \ldots, n$, т.е.

$$\sigma(P_\pm) = P_\pm, \ \sigma(p^i_\pm) = p^i_\pm.$$

Кривая $\mathscr{T}$ есть двулистное разветвленное в неподвижных точках σ накрытие фактор-кривой $\mathscr{T}_0 := \mathscr{T}/\sigma$ рода g_0 и $\pi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}_0$ отображение проекции. Из теоремы, известной как “формула Римана–Гурвица“род $\mathscr{T}$ равен $g = 2g_0 + n$. Зафиксируем в окрестностях точек $P_\pm$ локальные координаты $k^{-1}_\pm$, нечетным образом преобразующиеся под действием инволюции σ, т.е.

$$k_\pm(\sigma(p)) = -k_\pm(p).$$

Определение 2.2.1. Будем называть дивизор $D = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{g+n}$ на $\mathscr{T} \setminus \{P_\pm, p^i_\pm\}_{i=1}^n$ *допустимым*, если множество точек γ_s и γ_s^σ является множеством нулей мероморфного дифференциала $d\Omega$, имеющего простые полюса в неподвижных точках инволюции σ, вычеты, равные ± 1 в точках $P_\pm$ и вычеты противоположных знаков в $p^i_\pm$, т.е.

$$\mathrm{res}_{P_\pm} d\Omega = \pm 1, \quad \mathrm{res}_{p^i_+} d\Omega = -\mathrm{res}_{p^i_-} d\Omega. \tag{2.2.1}$$

Определение 2.2.2. Пусть D допустимый дивизор общего положения. Назовем *функцией Бейкера–Ахиезера двумерного оператора Шредингера* — функцию $\phi(x, y, p)$, $p \in \mathscr{T}$ на кривой $\mathscr{T}$, обладающая следующими свойствами

- мероморфная на $\mathscr{T} \setminus P_\pm$, имеющая простые полюса в точках γ_s (при условии, что все точки дивизора D различны);
- имеет вид
  $$\phi = e^{k_\pm(x \pm iy)} \left(\sum_{s=0}^\infty \xi_s^\pm(x, y) k_\pm^{-s} \right), \quad k_\pm^{-1} = k_\pm^{-1}(p); \tag{2.2.2}$$
  в окрестности точек $P_\pm$;
- значения в точках $p^i_\pm$ удовлетворяют уравнениям
  $$\phi(x, y, p^i_+) = \phi(x, y, p^i_-); \tag{2.2.3}$$
- коэффициенты $\xi_0^\pm$ в формуле (2.2.2) равны
  $$\xi_0^+(x, y) = 1, \ \xi_0^-(x, y) = 1. \tag{2.2.4}$$

Замечание 2.2.1. *Из работы [16] следует, что размерность пространства функций, удовлетворяющих первым двум условиям равна $n+1$. Таким образом, условие (2.2.3) (n уравнений) и условие нормировки $\xi_0^+ = 1$ единственным образом определяет функцию Бейкера–Ахиезера. Вопрос остается в том, почему при этом ξ_0^- тоже равняется единице. Для этого нужно рассмотреть дифференциал*

$$d\tilde{\Omega} := \phi^\sigma(x, y, p)\phi(x, y, p) d\Omega.$$

Действительно, $d\tilde{\Omega}$ хорошо определенный мероморфный дифференциал, имеющий полюса первого порядка в точках $P_\pm$ и $p^i_\pm$ и не имеющий полюсов в γ_s и γ_s^σ, $s = \overline{1, g+n}$ (поскольку у $d\Omega$ нули в полюсах $\phi(x, y, p)$ и $\phi^\sigma(x, y, p)$). Применяя теорему о вычетах к дифференциалу $d\tilde{\Omega}$, имеем

$$0 = \sum_{i=1}^n res_{p^i_+} d\tilde{\Omega} + \sum_{i=1}^n res_{p^i_-} d\tilde{\Omega} + res_{P_+} d\tilde{\Omega} + res_{P_-} d\tilde{\Omega} \tag{2.2.5}$$

В силу условий (2.2.1) и (2.2.3)

$$res_{p^i_+} d\tilde{\Omega} + res_{p^i_-} d\tilde{\Omega} = 0,$$

Из (2.2.1), (2.2.5) и разложения (2.2.2) функции Бейкера–Ахиезера в окрестностях точек $P_\pm$ имеем

$$1-(\xi_0^-(x,y))^2=0.$$

Из вышесказанного следует, что $\xi_0^-=\pm 1$. Если $x=0$ и $y=0$, тогда $\phi(0,0,p)=1$ тождественно $\forall p\in\mathscr{T}$. Следовательно, $\xi_0^-=1$.

2.2.2 Функция Бейкера–Ахиезера как решение двумерного уравнения Шредингера

Докажем, что построенная выше функция Бейкера–Ахиезера является решением двумерного уравнения Шредингера $\mathcal{H}\phi=0$ для некоторого потенциала $u(x,y)$. Во-первых, в окрестностях точек $P_\pm$

$$\partial_x^2\phi=k_\pm^2\phi+2k_\pm e^{k_\pm(x\pm iy)}\big(\sum_{s=0}^{\infty}\partial_x\xi_s^\pm(x,y)k_\pm^{-s}\big)+e^{k_\pm(x\pm iy)}\big(\sum_{s=0}^{\infty}\partial_x^2\xi_s^\pm(x,y)k_\pm^{-s}\big)$$

$$\partial_y^2\phi=-k_\pm^2\phi+2(\pm i)k_\pm e^{k_+(x\pm iy)}\big(\sum_{s=0}^{\infty}\partial_y\xi_s^\pm(x,y)k_\pm^{-s}\big)+e^{k_\pm(x\pm iy)}\big(\sum_{s=0}^{\infty}\partial_y^2\xi_s^\pm(x,y)k_\pm^{-s}\big),$$

тогда

$$\Delta\phi=2k_\pm e^{k_\pm(x\pm iy)}\big(\sum_{s=0}^{\infty}(\partial_x\pm i\partial_y)\xi_s^\pm(x,y)k_\pm^{-s}\big)+e^{k_\pm(x\pm iy)}\big(\sum_{s=0}^{\infty}\Delta\xi_s^\pm(x,y)k_\pm^{-s}\big)$$

и поскольку $\xi_0^\pm$ постоянные величины, не зависящие от x и y, то

$$\Delta\phi=e^{k_\pm(x\pm iy)}\big(2(\partial_x\pm i\partial_y)\xi_1^\pm(x,y)+O(k_\pm^{-1})\big).$$

Во-вторых, полюса функции Бейкера–Ахиезера не зависят от x и y. Следовательно, $-\Delta\phi(x,y,p)$ имеет простые полюса в точках γ_s, $s=\overline{1,g+n}$. Из вышесказанного можно заключить, что $-\Delta\phi(x,y,p)$ обладает свойствами функции Бейкера–Ахиезера, за исключением свойства (2.2.4). Пространство таких функций одномерно, что означает, что $-\Delta\phi(x,y,p)$ пропорциональна $\phi(x,y,p)$ с некоторым коэффициентом пропорциональности $u(x,y)$, т.е.

$$\Delta\phi(x,y,p)=u(x,y)\phi(x,y,p).$$

Замечание 2.2.2. *В комплексных координатах $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$ потенциал $u(x,y)$ может быть записан как*

$$u(z,\bar z)=4\partial_{\bar z}\xi_1^+=4\partial_z\xi_1^-.$$

2.2.3 θ–функциональные формулы

Ниже получены формулы для функции Бейкера–Ахиезера двумерного оператора Шредингера в терминах подходящих тэта–функций Прима и дифференциалов третьего рода, имеющих единственные полюса второго порядка в точках $P_\pm$.

Выберем на кривой $\mathscr{T}$ базис циклов $a_i, \tilde{a}_i$ и $b_i, \tilde{b}_i$, $a_{i'+g_0}$, $b_{i'+g_0}$, $i = \overline{1, g_0}$, $i' = \overline{1, n}$ с канонической матрицей пересечений и таких, что

$$\sigma(a_i) = \tilde{a}_i, \quad \sigma(b_i) = \tilde{b}_i, \ i = 1, \dots, g_0 \tag{2.2.6}$$

и

$$\sigma(a_{i'}) = -a_i, \quad \sigma(b_{i'}) = -b_{i'}, \ i' = \overline{g_0 + 1, g_0 + n}. \tag{2.2.7}$$

Соответствующий базис нормированных (единицей) на a–циклы голоморфных дифференциалов $d\omega_i, d\tilde{\omega}_{i'}$, $i = \overline{1, g_0 + n}$, $i' = \overline{1, g_0}$ обладает свойством

$$\sigma^* d\omega_i = d\tilde{\omega}, \ \sigma^* d\omega_{i'} = -d\omega_{i'}, \ i = \overline{1, g_0}, \ i' = \overline{g_0 + 1, g_0 + n}.$$

Пусть $J(\mathscr{T})$ — многообразие Якоби поверхности $\mathscr{T}$ и *отображение Абеля*

$$\mathcal{A}_{p_0}(p) = \Big(\int_{p_0}^{p} d\omega_1, \dots \int_{p_0}^{p} d\omega_{g_0+n}, \int_{p_0}^{p} d\tilde{\omega}_1, \dots, d\tilde{\omega}_{g_0}\Big), \ p \in \mathscr{T},$$

задающее вложение поверхности в Якобиан. Тогда инволюция σ индуцирует инволюцию на $J(\mathscr{T})$. *Многообразием Прима* накрытия $\mathscr{T} \to \mathscr{T}$ называется подмногообразие в $J(\mathscr{T})$, заданное условием

$$\Pr(\mathscr{T}, \sigma) = \{z \in J(\mathscr{T}) | \sigma_*(z) = -z\}.$$

Введем на $\mathscr{T}_0$ *дифференциалы Прима* du_i по правилу

$$\begin{cases} du_i = d\omega_i - d\tilde{\omega}_i, \ i = 1, \dots, g_0, \\ du_i = 2d\omega_i, i = g_0 + 1, \dots, g_0 + n, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

тогда

$$\sigma^* du_i = -du_i, \ \sigma^* du_j = -du_j, \ i = \overline{1, g_0}, \ j = \overline{g_0 + 1, g_0 + n}.$$

Последнее равенство означает, что дифференциалы Прима нечетны относительно σ. Имеет место другое неинвариантное определение многообразия Прима

$$\Pr(\mathscr{T}, \sigma) = \mathbb{C}^{g_0+n} / \{\mathbb{Z}^{g_0+n} + \Pi \mathbb{Z}^{g_0+n}\},$$

где Π— матрица b–периодов дифференциалов Прима

$$\Pi_{i,j} = \oint_{b_i} du_j, \ i, j = \overline{1, g_0 + n}.$$

Определение 2.2.3. *Тэта–функция Прима* — ряд, определенный формулой

$$\theta(z|\Pi) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^{g_0+n}} e^{2\pi i(z,m) + \pi i(m, \Pi m)}, \tag{2.2.9}$$

где $m = (m_1, m_2, \dots, m_{g_0+n})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^{g_0+n}$ и скалярное произведение $(z, m) := \sum_{i=1}^{g_0+n} z_i m_i$ Выясним некоторые ее свойства:

Лемма 2.2.1. *Для любых целочисленных векторов $K_1 \in \mathbb{Z}^{g_0+n}$ и $K_2 \in \mathbb{Z}^{g_0+n}$ имеет место закон преобразования для тэта–функции Прима*

$$\theta(z + K_1 + \Pi K_2|\Pi) = e^{-2\pi i(z,K_2)-\pi i(\Pi K_2,K_2)}\theta(z|\Pi) \tag{2.2.10}$$

Доказательство. Очевидно из определения (2.2.9), что добавление целочисленного вектора K_1 к аргументу z не изменит тэта–функцию Прима.

$$\theta(z + \Pi K_2|\Pi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^{g_0+n}} e^{2\pi i(z+\Pi K_2,m)+\pi i(\Pi m,m)} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^{g_0+n}} e^{2\pi i(z,m+K_2)+\pi i(\Pi(m+K_2),(m+K_2))-2\pi i(z,K_2)-\pi i(\Pi K_2,K_2)}$$

В последнем суммировании изменим индекс суммирования с $m \in \mathbb{Z}^{2g_0+n}$ на $m+K_2 \in \mathbb{Z}^{2g_0+n}$. Тем самым приходим к формуле (2.2.10). □

Определение 2.2.4. *Отображением Абеля–Прима A* с начальной точкой p_0, неподвижной относительно σ, называется отображение $\Gamma \to \mathbb{C}^{g_0+n}$ заданное формулой

$$A_{p_0}(p) = \Big(\int_{p_0}^{p} du_1, \dots \int_{p_0}^{p} du_{g_0+n}\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Справедлива Лемма о количестве нулей тэта–функции Прима на $\mathscr{T}$:

Лемма 2.2.2. *Для римановой поверхности $\mathscr{T}$ рода $g = 2g_0 + n$ с инволюцией σ, имеющей $2(n+1)$ неподвижных точек, соответствующая тэта–функция Прима $f(p) = \theta(A(p) - e)$ имеет $g + n$ нулей в общем положении.*

Доказательство. Доказательство стандартно и основано на интегрировании формы $\frac{1}{2\pi i} d\ln f(p)$ по границе многоугольника, из которого склеена поверхность $\mathscr{T}$

$$\{a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots a_{g_0+n}, b_{g_0+n}, a_{g_0+n}^{-1}, b_{g_0+n}^{-1}, \tilde a_1, \tilde b_1, \tilde a_1^{-1}, \tilde b_1^{-1}, \dots \tilde a_{g_0}, \tilde b_{g_0}, \tilde a_{g_0}^{-1}, \tilde b_{g_0}^{-1}\}.$$

Пусть $A_j := \int_{p_0}^{P} du_j$ компонента с номером j отображения Абеля–Прима. Определим f^+ и f^- как значения f в точках границы многоугольника, лежащие на a, b и a^{-1}, b^{-1} циклах соответственно. Тогда выполняются равенства

$$\begin{cases} A_j^- = A_j^+ + \Pi_{kj},\ p \in a_k,\ k \in \overline{1, g_0+n} \\ A_j^- = A_j^+ - \Pi_{kj},\ p \in \tilde a_k,\ k \in \overline{1, g_0} \\ A_j^+ = A_j^- - \delta_{k,j},\ p \in b_k,\ k \in \overline{1, g_0} \\ A_j^+ = A_j^- + \delta_{k,j},\ p \in \tilde b_k,\ k \in \overline{1, g_0} \\ A_j^+ = A_j^- - 2\delta_{k,j},\ p \in b_k,\ k \in \overline{g_0+1, g_0+n} \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Тогда, воспользовавшись законом преобразования тэта–функций, получим

$$\begin{cases} \ln f^- = \ln f^+,\ p \in b_k, \tilde{b}_l,\ k \in \overline{1, g_0+n},\ l \in \overline{1, g_0} \\ \ln f^- = \ln f^+ - \pi i \Pi_{kk} - 2\pi i A_k^+,\ p \in a_k,\ k \in \overline{1, g_0+n} \\ \ln f^- = \ln f^+ - \pi i \Pi_{kk} + 2\pi i A_k^+,\ p \in \tilde{a}_k,\ k \in \overline{1, g_0}. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Из (2.2.12) справедлива цепочка равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma} d\ln f = \frac{1}{2\pi i}\Big(\sum_{k=1}^{g_0+n}(\oint_{a_k} + \oint_{b_k}) + \sum_{l=1}^{g_0}(\oint_{\tilde{a}_l} + \oint_{\tilde{b}_l})\Big)(d\ln f^+ - d\ln f^-) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\sum_{k=1}^{g_0+n}\oint_{a_k} + \sum_{l=1}^{g_0}\oint_{\tilde{a}_l})(d\ln f^+ - d\ln f^-) = \sum_{k=1}^{g_0+n}\oint_{a_k} du_k + \sum_{l=1}^{g_0}\oint_{\tilde{a}_l} du_l = 2g_0 + 2n,$$

где использовалось дифференцирование формул (2.2.12) и то, что $\oint du_i = 1,\ i \in \overline{1, g_0}, \oint a_k = 2,\ k \in \overline{g_0+1, g_0+n}$. Лемма доказана. □

Аналог теоремы Римана о нулях можно получить для тэта–функции Прима:

Лемма 2.2.3. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+n}$ множество всех нулей функции $f(p) = \theta(A(p) - e))$. Тогда выполняется соотношение*

$$A(\sum_{s=1}^{g+n}\gamma_s) \equiv e - K,$$

где K постоянный вектор (аналог констант Римана).

Пусть $d\Omega_+$ и $d\Omega_-$ нечетные относительно σ мероморфные дифференциалы на кривой $\mathscr{T}$, имеющие единственные полюса второго порядка в точках P_+ и P_- соответственно и разложение в окрестности $P_\pm$ вида

$$d\Omega_\pm = dk_\pm(1 + O(k_\pm^{-2})),$$

нормированные на a–периоды($\oint_{a_j, \tilde{a}_l} d\Omega_\pm = 0$) , а $\Omega_\pm(p)$ — абелевы интегралы дифференциалов $d\Omega_\pm$, т.ч.

$$\Omega_\pm = \int_{P_+}^{p} d\Omega_\pm.$$

Уточним определение Ω_+, поскольку $d\Omega_+$ имеет полюс в точке P_+. Под его интегралом от точки P_+ подразумевается выбор ветви $\Omega_+ = k_+ + O(k_+^{-1})$ в окрестности точки P_+, а затем аналитическое продолжении вдоль пути. Далее во всех формулых Главы 2 предполагается, что пути в определении $A(p)$ и $\Omega_\pm(p)$ совпадают и в качестве начальной точки отображения Абеля–Прима выбирем P_+.

Теорема 2.2.1. *Функция Бейкера–Ахиезера двумерного оператора Шредингера имеет вид*

$$\phi(x,y,p)=\frac{\theta(A(p)+zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z|\Pi)\theta(Z|\Pi)}{\theta(zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z|\Pi)\theta(A(p)+Z|\Pi)}e^{z\Omega_{+}(p)+\bar{z}\Omega_{-}(p)}, \tag{2.2.13}$$

где координаты векторов $U_{+},U_{-}\in\mathbb{C}^{g_0+n}$ даются формулой

$$U_{\pm}^{j}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j}d\Omega_{\pm}. \tag{2.2.14}$$

При этом

$$Z=-\sum_{s=1}^{g+n}A(\gamma_s)+\mathcal{K}, \tag{2.2.15}$$

где $\mathcal{K}$ постоянный вектор.

Доказательство.

1. Функция $\phi(x,y,p)$, заданная формулой правой части равенства (2.2.13) является однозначной функцией аргумента $p\in\mathscr{T}$. Действительно, отображение Абеля–Прима определено неоднозначно.

   Если при интегрировании добавился цикл a_j или $\tilde{a}_l$ тогда

$$\frac{\theta(A(p)+\oint_{a_j}du+zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z)}{\theta(A(p)+\oint_{a_j}du+Z)}e^{z\Omega_{+}(p)+\bar{z}\Omega_{-}(p)+z\oint_{a_j}d\Omega_{+}+\bar{z}\oint_{a_j}d\Omega_{-}}=$$
$$=\frac{\theta(A(p)+zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z)}{\theta(A(p)+Z)}e^{z\Omega_{+}(p)+\bar{z}\Omega_{-}(p)},$$

   где в последнем равенстве мы воспользовались свойством (2.2.10) и тем, что a–периоды мероморфных дифференциалов $d\Omega_{\pm}$ равны нулю.

   Если при интегрировании добавился цикл b_j, тогда

$$\frac{\theta(A(p)+\oint_{b_j}du+zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z)}{\theta(A(p)+\oint_{b_j}du+Z)}e^{z\Omega_{+}(p)+\bar{z}\Omega_{-}(p)+z\oint_{b_j}d\Omega_{+}+\bar{z}\oint_{b_j}d\Omega_{-}}=$$
$$=\frac{e^{-2\pi i(A_j(p)+zU_{+}^{j}+\bar{z}U_{-}^{j}+Z_j)-\pi i\Pi_{j,j}}}{e^{-2\pi i(A_j(p)+Z_j)-\pi i\Pi_{j,j}}}\frac{\theta(A(p)+zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z)}{\theta(A(p)+Z)}e^{z\Omega_{+}(p)+\bar{z}\Omega_{-}(p)+zU_{+}^{j}+\bar{z}U_{-}^{j}}=$$
$$\frac{\theta(A(p)+zU_{+}+\bar{z}U_{-}+Z)}{\theta(A(p)+Z)}e^{z\Omega_{+}(p)+\bar{z}\Omega_{-}(p)},$$

   где мы воспользовались свойством (2.2.10) и определением векторов $U_{\pm}$. Пользуясь свойствами $\oint_{\tilde{b}_j}d\Omega_{\pm}=-\oint_{b_j}d\Omega_{\pm}$ и $\oint_{\tilde{b}_j}du_i=-\Pi_{ji}$, аналогично проверяется, что ϕ остается однозначной, если при интегрировании добавился $\tilde{b}$ цикл.

2. Легко видеть, что функция $\phi(x,y,p)$ из (2.2.13) имеет нужную экспоненциальную особенность в отмеченных точках $P_{\pm}$, поскольку дифференциалы $d\Omega_{\pm}$ имеют полюса второго порядка. Вне этих точек ϕ мероморфна.

3. Докажем совпадение значений $\phi(x,y,p)$ в парах точек $p^i_\pm$, $i=\overline{1,n}$, т.е. свойство (2.2.3). Из нечетности дифференциалов $\sigma^*(d\Omega_\pm) = -d\Omega_\pm$ следует равенство

$$\Omega_\pm(p^i_+) - \Omega_\pm(p^i_-) = \int_{p^i_-}^{p^i_+} d\Omega_\pm = \frac{1}{2}\oint_{a_{g_0+i}} d\Omega_\pm = 0. \tag{2.2.16}$$

Аналогично, из нечетности дифференциалов Прима следуют равенства

$$\int_{p^i_-}^{p^i_+} du_j = \frac{1}{2}\int_{a_{g_0+i}} du_j = 0 \quad j=1,\ldots,g_0, \tag{2.2.17}$$

$$\int_{p^i_-}^{p^i_+} du_{g_0+j} = \frac{1}{2}\int_{a_{g_0+i}} du_{g_0+j} = \delta_{ij} \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.18}$$

Значит, координаты вектора $A(p^i_+) - A(p^i_-)$ целочисленны. Поскольку тэта-функция периодична относительно сдвигов аргумента на целочисленные векторы, то из (2.2.16) следует равенство (2.2.3).

4. Докажем равенства (2.2.4). Первое из них есть следствие определения ϕ формулой (2.2.13). Для доказательства второго рассмотрим нечетный цикл a_0, проекция которого на $\mathscr{T}_0$ есть путь, соединяющий точки $P_\pm$. Легко видеть, что он гомологичен

$$a_0 = -\sum_{i=1}^{n} a_{g_0+i} \in H_1(\Gamma;\mathbb{Z}).$$

Из этого и равенств (2.2.17) следует, что координаты вектора $A(P_-)$ целочисленны, что доказывает второе из равенств (2.2.4).

5. Дивизор полюсов $D = D(Z)$ функции ϕ, заданной формулой (2.2.13) – это хорошо определенный дивизор многозначной функции $\theta(A(p)+Z|\Pi)$. Из Леммы 2.2.2 следует , что степень дивизора нулей тэта–функции Прима равна $2g_0+n = g+n$. Стандартным образом доказывается равенство (2.2.15), связывающее преобразование Абеля-Прима дивизора $D(Z)$ и вектор Z. Утверждение о том, что для произвольного вектора общего положения Z дивизор $D(Z)$ нулей многозначной функции $\theta(A(p)+Z|\Pi)$ является допустимым будет доказано в Лемме 2.2.7. Нужно показать, что существует мероморфный дифференциал $d\Omega$ с нулями в точках $D+D^\sigma$ с простыми полюсами в неподвижных точках σ, вычеты которого в этих точках удовлетворяют равенствам (2.2.1).

□

Теорема 2.2.2. *Функция Бейкера-Ахиезера ϕ, заданная формулой (2.2.13), где Z - произвольный вектор общего положения, удовлетворяет двумерному уравнению Шредингера $\mathcal{H}\phi = 0$ с потенциалом*

$$u(x,y) = -2\Delta\ln\theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi) + E, \quad E := 4\frac{d\Omega_-}{d(k_+^{-1})}(P_+). \tag{2.2.19}$$

Если для некоторых целочисленных векторов N_1, N_2 и M_1, M_2 имеют место равенства

$$2\pi\ell_1(U_+ + U_-) = N^a + \Pi N^b, \quad 2\pi i\ell_2(U_+ - U_-) = M^a + \Pi M^b \tag{2.2.20}$$

то $u(x, y)$ $(2\pi\ell_1, 2\pi\ell_2)$-периодическая, а значения функции Бейкера–Ахиезера в точках $p^i_\pm$ $\phi_i := \phi(x, y, p^\pm_i)$ являются собственными для оператора $-\Delta + u(x, y)$ в пространстве (анти)периодических функций.

Доказательство.

1. Ранее было показано, что для произвольного вектора Z функция ϕ удовлетворяет условиям, определяющим функцию Бейкера-Ахиезера для некоторого дивизора $D(Z)$. В Замечании раздела 2.2.2 с помощью аргумента о единственности функции Бейкера–Ахиезера было показано, что функция Бейкера–Ахиезера является решением уравнения Шредингера $\mathcal{H}\phi = 0$ с потенциалом $u = 4\partial_{\bar z}\xi^+_1$, где ξ^+_1 это коэффициент разложения (2.2.2) функции ϕ в точке P_+. Зная формулу для функции Б–А, найдем ξ^+_1. Для этого воспользуемся билинейными соотношениями Римана, чтобы получить формулу

$$A(p) = -2U_+k_+^{-1} + O(k_+^{-2}) \tag{2.2.21}$$

в окрестности точки P_+, далее, в окрестности этой точки разложение Абелева интеграла от дифференциала $d\Omega_-$

$$\Omega_-(p) = Ek_+^{-1} + O(k_+^{-2}) \tag{2.2.22}$$

где E — коэффициент, определяемый формулой $d\Omega_- = dk_-(1+Ek_-^{-2}+\mathrm{O}(k^{-3}))$.

Подстановка (2.2.21) и (2.2.22) в (2.2.13) дает формулу (2.2.19). В общем случае она задает мероморфную квазипериодическую функцию переменных (x, y).

2. Проверка периодичности. Если выполняется условие (2.2.20), то

$$\begin{aligned} u(x + 2\pi\ell_1, y) = -2\Delta \ln\theta(2\pi\ell_1(U_+ + U_-) + zU_+ + \bar zU_- + Z) + E = \\ = -2\Delta \ln\theta\big((N^a + \Pi N^b) + zU_+ + \bar zU_- + Z\big) + E = \\ = -2\Delta\Big(-2\pi i(zU_+ + \bar zU_- + Z)N_b) - \pi i(\Pi N^b, N^b)\Big) - \\ -2\Delta \ln\theta(zU_+ + \bar zU_- + Z) + E = u(x, y). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется периодичность по y.

3. Рассмотрим дифференциалы

$$\begin{cases} dp_1 := d\Omega_+ + d\Omega_- - \sum_{j=1}^{g_0+n} iN^b_j du_j/\ell_1, \\ dp_2 := i(d\Omega_+ - d\Omega_-) - \sum_{j=1}^{g_0+n} iM^b_j du_j/\ell_2. \end{cases} \tag{2.2.23}$$

Периоды этих дифференциалов по базисным циклам $a_j,\ b_j, \tilde a_j, \tilde b_j \in H_1(\mathscr{T}, \mathbb{Z})$

имеют вид

$$\oint_{a_j} dp_1 = -iN_j^b/\ell_1,\ \oint_{b_j} dp_1 = iN_j^a/\ell_1, \oint_{a_j} dp_2 = -iM_j^b/\ell_2,\ \oint_{b_j} dp_2 = iM_j^a/\ell_2$$

$$\oint_{\tilde{a}_j} dp_1 = iN_j^b/\ell_1,\ \oint_{\tilde{b}_j} dp_1 = -iN_j^a/\ell_1, \oint_{\tilde{a}_j} dp_2 = iM_j^b/\ell_2,\ \oint_{\tilde{b}_j} dp_2 = -iM_j^a/\ell_2$$

Отсюда следует, что, если выполнены равенства (2.2.20), то функции

$$w_j(p) = \exp\left(2\pi\ell_j \int^p dp_j\right), \tag{2.2.24}$$

являются однозначно определлнными функциями на кривой $\mathscr{T}$. Вне отмеченных точек $P_\pm$ они голоморфны, а в отмеченных точках имеют существенную особенность. Более того, заметим, что в силу (2.2.16) имеют место равенства $w_j(p_+^i) = w_j(p_-^i)$ для всех $i = \overline{1,n}$. Из единственности функции Бейкера-Ахиезера следуют равенства

$$\phi(x + 2\pi\ell_1, y, p) = w_1\phi(x, y, p),\ \phi(x, y + 2\pi\ell_2, p) = w_2\phi(x, y, p) \tag{2.2.25}$$

означающие, что функция Бейкера-Ахиезера является блоховским решением уравнения $\mathcal{H}\phi = 0$. Заметим также, что из нечетности относительно σ дифференциалов $d\Omega_\pm$ следует, что $w_j(\sigma(p)) = w_j^{-1}(p)$. Так как точки $p_\pm^i$ неподвижны относительно σ, то $w_j^2(p_\pm^i) = 1$, что завершает доказательство теоремы.

□

2.2.4 Дифференциал $d\Omega$

Дифференциал $d\Omega$ может быть записан явно. Для того, чтобы вывести формулу необходимо доказать следующие утверждения:

Лемма 2.2.4. *Имеет место следующее равенство*

$$dp_1\langle\phi_x\phi^\sigma - \phi_x^\sigma\phi\rangle_y + dp_2\langle\phi_y\phi^\sigma - \phi_y^\sigma\phi\rangle_x = 0. \tag{2.2.26}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\phi} = \phi(x, y, \tilde{Q})$ и $\phi^\sigma = \phi(x, y, \sigma(Q))$, где Q и $\tilde{Q}$ — произвольные точки Г. Тогда

$$\begin{cases} \partial_x^2\tilde{\phi} + \partial_y^2\tilde{\phi} - u(x,y)\tilde{\phi} = 0, \\ -\partial_x^2\phi^\sigma - \partial_y^2\phi^\sigma + u(x,y)\phi^\sigma = 0 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение системы на ϕ^σ, второе на $\tilde{\phi}$. И сложим. Тогда

$$\partial_x\big(\tilde{\phi}_x\phi^\sigma - \phi_x^\sigma\tilde{\phi}\big) + \partial_y\big(\tilde{\phi}_y\phi^\sigma - \phi_y^\sigma\tilde{\phi}\big) = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство по прямоугольнику $[x, x+2\pi\ell_1] \times [y, y+2\pi\ell_2]$

$$\Big(\frac{\tilde{w}_1}{w_1} - 1\Big)\langle \tilde{\phi}_x \phi^\sigma - \phi^\sigma_x \tilde{\phi}\rangle_y + \Big(\frac{\tilde{w}_2}{w_2} - 1\Big)\langle \tilde{\phi}_y \phi^\sigma - \phi^\sigma_y \tilde{\phi}\rangle_x = 0,$$

и устремляя $\tilde{Q}$ к Q получаем искомое равенство. □

Лемма 2.2.5. *Выражения $\langle \phi_x \phi^\sigma - \phi^\sigma_x \phi\rangle_y$ и dp_1 ($\langle \phi_y \phi^\sigma - \phi^\sigma_y \phi\rangle_x$ и dp_2) имеют общие $2g+2$ нуля.*

Доказательство. Рассмотрим равенство (2.2.26) из Леммы 2.2.4, записанное в виде

$$dp_1 \langle \phi_x \phi^\sigma - \phi^\sigma_x \phi\rangle_y = -dp_2 \langle \phi_y \phi^\sigma - \phi^\sigma_y \phi\rangle_x.$$

1. Поскольку $\langle \phi_y \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_y\rangle_x$ и $\langle \phi_x \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_x\rangle_y$ — мероморфные функции, а число полюсов равно $2(g+n)+2$ (полюса в $P_\pm$ и D), то число нулей $\langle \phi_y \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_y\rangle_x$ и $\langle \phi_x \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_x\rangle_y$ равно $2(g+n)+2$, из которых $2n$ находятся в точках $p^i_\pm$, $i = \overline{1,n}$.

2. Число нулей dp_i равно $2g+2$, поскольку у $d\Omega_\pm$, входящие в формулы (2.2.23), полюса второго порядка в $P_\pm$, а степень дивизора дифференциалов на $\mathscr{T}$ равна $2g-2$.

3. Из статьи [59] следует, что в ситуации общего положения дифференциалы dp_1 и dp_2, определенные формулами (2.2.23), не имеют общих нулей. Следовательно $2g+2$ нулей $\langle \phi_y \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_y\rangle_x$ и dp_1 совпадают. Аналогично для $\langle \phi_x \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_x\rangle_y$ и dp_2.

□

Используя Лемму 2.2.5 можно в явном виде записать формулу для дифференциала $d\Omega$:

Лемма 2.2.6. *Дифференциал $d\Omega$ имеет вид*

$$d\Omega := \frac{2i dp_1}{\langle \phi_y \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_y\rangle_x} = \frac{-2i dp_2}{\langle \phi_x \phi^\sigma - \phi\phi^\sigma_x\rangle_y}, \tag{2.2.27}$$

где символы $\langle\cdot\rangle_x$ $\langle\cdot\rangle_y$ обозначают среднее по переменным x и y, соответственно, а dp_1, dp_2 дифференциалы, определяемые формулами (2.2.23).

Доказательство. Из Леммы 2.2.5 следует, что правые части формулы (2.2.27) голоморфны вне точек $P_\pm$ и $p^i_\pm$ и имеют нули в полюсах ϕ и ϕ^σ, и простые полюса в точках $p^i_\pm$.

Докажем, что вычеты $d\Omega$ в точках p^i_+ и p^i_- имеют противоположные знаки для кривых, отвечающих периодическим потенциалам. На таких кривых равенство (2.2.24) корректно определяет функцию $w_1(p)$. Зафиксируем комплексное число w_{10} и рассмотрим точки кривой $\mathscr{T}$, для которых выполнены равенства $w_1(p_\nu) = w_{10}$.

Введем обозначения $\phi_\nu = \phi(x,y,p_\nu), \phi_\nu^+ = \phi(x,y,\sigma(p))$. Из [51] следует, что для любой периодической функции $f(x)$ ряды (2.2.28) сходятся и равны

$$f(x) = \sum_\nu r_\nu^{-1}\langle \phi_\nu^+ f(x)\rangle_x \phi_{\nu,y} = -\sum_\nu r_\nu^{-1}\langle \phi_{\nu,y}^+ f(x)\rangle_x \phi_\nu, \tag{2.2.28}$$

где $r_\nu := \langle \phi_{\nu,y}\phi_\nu^\sigma - \phi_\nu \phi_{\nu,y}^\sigma\rangle_x$. Строго говоря, это равенство справедливо, при $w_{10}^2 \neq 1$, так как в противном случае, часть точек p_ν совпадает с точками ветвления $p_\pm^i$, в которых соответсвующее выражение $r_\nu = 0$. Заметим, что левая часть равенства (2.2.28) не зависит от выбора w_{10}. Поэтому, устремляя $w_{10}^2 \to 1$, мы получаем, что сингулярные члены ряда (2.2.28) для $w_{10}^2 = 1$ должны сократиться. Поскольку $f(x)$ произвольная, имеем, что для каждой пары, отвечающей точке ветвления, имеет место сокращение. Это эквивалентно равенствам (2.2.1). $\square$

Лемма 2.2.7. *Для произвольного вектора Z (общего положения) дивизор $D(Z)$ нулей (многогозначной) функции $\theta(A(p) + Z|\Pi)$ является допустимым, то есть дивизор $D + D^\sigma$ – это дивизор нулей мероморфного дифференциала $d\Omega$ с простыми полюсами в неподвижных точках σ, вычеты которого в этих точках удовлетворяют равенствам (2.2.1).*

Доказательство. немедленно следует из Леммы 2.2.6. $\square$

2.2.5 Условие вещественности потенциала

Лемма 2.2.8. *Если на кривой $\mathscr{T}$ имеется антиинволюция $\tau : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$, т.ч.*

$$\tau(P_+) = P_-,\ \tau^*(k_+) = \bar{k}_-,\ \tau(p_i^+ + p_-^i) = (p_i^+ + p_-^i),\ \tau(D) = D, \tag{2.2.29}$$

тогда соответствующий потенциал является вещественным.

Доказательство. Несложно убедиться, что функция $\bar{\phi}(x,y,\tau(p))$ имеет все свойства функции Бейкера–Ахиезера. Следовательно, в силу единственности, имеем

$$\bar{\phi}(x,y,\tau(p)) = \phi(x,y,p).$$

$\square$

2.2.6 Условие неособости потенциала

В это параграфе будут приведены несколько типов достаточных условий для того, чтобы построенный потенциал операратора Шредингера являлся неособым.

Теорема 2.2.3. *Предположим, что $\mathscr{T}$ является M-кривой с неподвижными овалами $a_0, a_1, \ldots, a_{g_0+n}, \tilde{a}_1, \ldots \tilde{a}_{g_0}$, на которые голоморфная инволюция действует как в (2.2.6, 2.2.7). Предположим также, что $p_\pm^i \in a_{2g_0+i}$. Тогда, если точки γ_s допустимого дивизора D степени $g+n$ лежат по одной на каждом из овалов $a_1 \ldots, a_{g_0}$,*

$\tilde{a}_1, \ldots a_{g_0}$ и по одной в каждом из сегментов a_{2g_0+i}, на которые этот овал разбивается парой точек $p^i_\pm$, то соответствующий потенциал является вещественным и неособым.

Доказательство. Доказательство стандартно. Как видно из формулы (2.2.13) полюса потенциала соответствуют значениям (x, y), при которых один из нулей ϕ совпадает с отмеченной точкой P_+. Это невозможно, поскольку при всех (x, y) на каждом из циклов $a_1 \ldots, a_{g_0}$, $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{g_0}$ и на каждом из сегментов циклов a_{2g_0+i} имеется по крайней мере по одному нулю, а всего нулей $g + n = 2g_0 + 2n$. То, что на каждом из перечисленных циклов и сегментов имеется, по крайней мере один ноль, следует из того, что сумма чисел нулей и полюсов периодической функции на периоде всегда четна, а на каждом цикле или сегменте (на концах которого значения ϕ равны) имеется по условию один полюс. □

Второй тип условий, гарантирующий неособость потенциала аналогичен условиям неособости решений уравнения КР-I (см. [18])

Теорема 2.2.4. *Предположим, что антиинволюция $\sigma\tau$ имеет разделяющий тип, т.е. что дополнение к ее неподвижным овалам $a_1, \ldots, a_k$ состоит из двух несвязных областей $\mathcal{T}^\pm$,*

$$\sigma\tau(\mathcal{T}^+) = \mathcal{T}^-.$$

Если при этом $p^i_\pm \in \mathcal{T}^\pm$, а дифференциал $d\Omega$, определяющий допустимый дивизор D положителен на a_s относительно ориентации, индуцированной областью $\mathcal{T}^+$, и, кроме того, если

$$res_{p_i^+} d\Omega < 0,$$

то соответствующий потенциал оператора Шредингера является вещественным и неособым.

Доказательство. Обозначим через

$$\phi'(x, y, p) := \theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|\Pi)\phi(x, y, p) \tag{2.2.30}$$

ненормированную функцию Бейкера-Ахиезера. Она имеет те же аналитические свойства, что и ϕ', кроме условия нормировки (2.2.4). По уже доказанному, первый сомножитель в произведении, определяющем ϕ, вещественнен. Следовательно, для функция ϕ имеет место равенство $\phi'(x, y, \tau(p)) = \bar{\phi}'(x, y, p)$. Циклы a_s, объединение которых является границей области $\mathcal{T}^+$, неподвижны относительно $\sigma\tau$. Значит, если обозначить через $d\hat{\Omega}$ дифференциал $d\hat{\Omega} = \phi'\phi'^{\sigma} d\Omega$, то

$$\oint_{\partial\Gamma^+} d\hat{\Omega} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{p^i_+}\, d\hat{\Omega} = \oint_{\partial\Gamma^+} |\phi'|^2 d\Omega - \sum_{i=1}^{n} c_i |\phi'(x, y, p^i_+)|^2 > 0 \tag{2.2.31}$$

при любых значениях x, y. Предположим, что потенциал имеет особенность в точке x_0, y_0. Тогда $\phi'(x_0, y_0, P_+) = 0$. Следовательно, дифференциал $d\hat{\Omega}(x_0, y_0, p)$ не имеет полюса в P_+, т.е. в области $\mathcal{T}^+$ он имеет полюсы только в точках p^i_+. Значит левая часть равенства (2.2.31) равна нулю при $x = x_0, y = y_0$. Противоречие. □

2.2.7 Простейший пример. Гиперэллиптическая кривая. Решение $\mathbb{CP}^n$ сигма моделей

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую $\mathscr{T}$ –двулистное накрытие над рациональной кривой $\mathscr{T}$ с $2(n+1)$ точками ветвления $X=0$, $X=\infty$ и $p^i_\pm,\ i=\overline{1,n}$, заданную уравнением

$$Y^2 = X\prod_{i=1}^{n}(X-p^i_+)(X-p^i_-),$$

с соответсвующим базисом a–циклов, являющимися прообразами разрезов между точками $p^i_\pm$. Если B матрица b–периодов соответсвующих нормированных голоморфных дифференциалов, то определенная ранее матрица Прима равна $\Pi = 2B$. Значения функции ϕ из Леммы 2.2.1 в точках $p^j_\pm$ равняются

$$\phi_j(x,y) := \phi(x,y,p^j_\pm) = \frac{\theta(B_j + zU_+ + \bar{z}U_- + Z|2B)\theta(Z|2B)}{\theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|2B)\theta(B_j + Z|2B)} e^{zU^j_+ + \bar{z}U^j_-}. \qquad (2.2.32)$$

Лемма 2.2.9. *Функции ϕ_i, определенные формулой (2.2.32), удовлетворяют уравнению Шредингера $\mathcal{H}\phi_i = 0$ с потенциалом*

$$u(z,\bar{z}) = -2\Delta \ln\theta(zU_+ + \bar{z}U_- + Z|2B) + E,\ E = 4\frac{d\Omega_-}{d(k_+^{-1})}(P_+). \qquad (2.2.33)$$

Приведенные выше достаточные условия вещественности и неособости этого потенциала относятся к двум типам вещественных гиперэллиптических кривых. Первый из них соответствует вещественным точкам ветвления – $p^i_\pm = \bar{p}^i_\pm$, а второй к случаю $p^i_\pm = \bar{p}^i_\mp$.

2.2.8 Условия самосогласования для гиперэллиптических кривых

В настоящем параграфе рассматриваются "условия самосогласования".

Понятие нестационарного оператора Шредингера с самосоглаованным потенциалом было введено в работе Кричевера [58], целью которой являлось построение точных мультисолитонных решений физических моделей, описывающих взаимодействие низкочастотных и высокочастотных волновых пакетов. В общем виде такое понятие возникло в работе [18], в которой был предложен подход к построению конечнозонных решений нелинейных уравнений, связанных с нестационарным оператором Шредингера. Идея подхода заключается в выборе среди всех алгебро–геометрических данных, определяющих линейное интегрируемое уравнение, тех данных, для которых соответствующий потенциал выражается в терминах решений уравнения. Подстановка соответсвующей зависимости в линейное уравнение приводит к системе нелинейных уравнений. Позже в работах [54] и [21] данный метод был обобщен на случай систем, связанных с двумерным оператором Шредингера.

Лемма 2.2.10. *Потенциал (2.2.33) двумерного уравнения Шредингера из Леммы 2.2.9 удовлетворяет равенству*

$$\partial_z u = \partial_{\bar{z}}(\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \phi_i^2), \tag{2.2.34}$$

где

$$\kappa_i^2 = 8c_i(f(p_-^i) - f(p_+^i))f_0^{-1} \tag{2.2.35}$$

и $f(p)$ — *мероморфная функция на гиперэллиптической кривой* $\mathscr{T}$ *с полюсом порядка* 2 *в точке* P_+ *и нулем порядка* 2 *в точке* P_- *и* f_0 *определяется разложением* $f = k_+^2 + f_0 + O(k^{-1})$ *в точки* P_+.

Доказательство. Такая функция $f(p),\ p \in \mathscr{T}$ существует, ввиду того, что основная характеристика гиперэллиптической кривой — существование функции с полюсом порядка 2 в одной точке. Применяя теорему о вычетах к мероморфному дифференциалу $f(p)\phi(z,\bar{z},p)\phi^\sigma(z,\bar{z},p)d\Omega$, имеем

$$2\xi_2^+ - \xi_1^{+2} + \sum_i \big(f(p_+^i) - f(p_-^i)\big)c_i\phi^2(z,\bar{z},p^i) = 0.$$

Продифференцируем последнее равенство и воспользуемся формулами $u = 4\partial_{\bar{z}}\xi_1^+$ и

$$-4(\partial_{\bar{z}}\xi_2 + \partial_z\partial_{\bar{z}}\xi_1) + u\xi_1 = 0,$$

получаем искомое соотношение. □

Замечание 2.2.3. *Определим вектор–функцию*

$$\vec{\phi} := \big(\kappa_1\phi_1, \quad \dots \quad \kappa_n\phi_n\big)$$

и стандартное скалярное произведение в n*–мерном пространстве* $\langle\cdot,\cdot\rangle_\kappa$, *определяемое действием на произвольные вектора в* n*–мерном пространстве*

$$\langle v, \tilde{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i\tilde{v}_i.$$

Следствием предшествующих рассуждения является следующая теорема:

Теорема 2.2.5. *Система уравнений*

$$\begin{cases} \mathcal{H}\vec{\phi} = 0 \\ \partial_z u = \partial_{\bar{z}}\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle, \end{cases} \tag{2.2.36}$$

является Лагранжевой, для которой Лагранжиан имеет вид

$$L = 4\langle\partial_z\vec{\phi}, \partial_{\bar{z}}\vec{\phi}\rangle + w_{\bar{z}}\big(2\langle\vec{\phi},\vec{\phi}\rangle - w_z\big), \tag{2.2.37}$$

где $w_{\bar z} = u$. *Кроме того* u *дается формулой (2.2.33), а компоненты вектора* $\phi_j = \kappa_j \phi_j$ *определяются формулами (2.2.32) и (2.2.35).*

Заключение

Диссертация посвящена спектральной теории периодических дифференциальных и разностных операторов и ее приложениям. Отметим особую роль функции Бейкера–Ахиезера.

В Главе 1 построены новые гамильтоновы динамические системы на пространстве строго нижнетреугольных разностных операторов, связанные с иерархией двумеризованной цепочки Тода. В частности, вычислены гамильтонианы и соответствующие симплектические структуры. Указаны переменные действие–угол. Подход Кричевера–Фонга к изучению гамильтоновой природы уравнений универсален и может быть в дальнейшем применен, например, к близкой по духу дискретной иерархиии mКдФ, интерес к которой в последнее время вызван работой [35]. Кроме того, в суперпериодическом случае для оператора порядка 3 интересно вычислить модифицированную версию 2–формы Кричевера–Фонга 1.1.61 на пространстве $\mathcal{E}_{3,n}$ и сравнить ее с результатами работ Овсиенко, Шварца и Табачникова.

В Главе 2 для двумерного оператора Шредингера с периодическим положительным потенциалом доказано, что Ферми–кривая есть гладкая М–кривая, и что полюса блоховских решений расположены по одному на каждом из неподвижных овалов одной из антиголоморфных инволюций. Отметим, что таким образом спектральная кривая двумерного периодического оператора Шредингера с положительным потенциалом необходимо и достаточно является M–кривой. Топологический тип кривой остается стабильным, пока при некотором значении параметра деформации нулевой уровень энергии не становится собственным для оператора Шредингера в пространстве (анти)периодических функций. Остается открытым вопрос о доказательстве необходимости найденных ранее достаточных условий на спектральные данные, отвечающих неособым вещественным потенциалам произвольного знака и о классификации типов особенностей. Также возникает вопрос о возможности применения подхода Натанзона в том случае, когда голоморфная инволюция кривой имеет более одной пары неподвижных точек. Приведен пример обобщенной конструкции Веселова–Новикова для случая гиперэллиптических кривых. Этот пример важен тем, что позволяет строить операторы Шредингера, имеющие n собственных функций. Благодаря определяющему гиперэллиптическую кривую свойству получен определенный тип условий самосогласования. Кроме того, доказано, что система уравнений Шредингера с данным условием самосогласования, является Лагранжевой, т.е. приведен явный вид для Лагранжиана, для которого уравнения Эйлера–Лагранжа будут совпадать с исходными уравнениями.

Литература

[1] Gardner, C. S., Green, J. M., Kruskal, M. D., Miura, R. M., *Method for solving KdV equation,* Phys. Rev. Lett. 15 (1967), 1095–1097.

[2] Lax, P. D. *Integrals of nonlinear equation of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math. 21(1968), 467–490

[3] Zakharov, V. E. , Shabat, A. B. , *Exact theory of the 2D self focusing and 1D auto modulation in nonlinear media*, Soviet Physics JETP 34 (1972), 62–69.

[4] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C., Segur, H. *Method for solving the sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1262–1264.

[5] С.П. Новиков, *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I,* Функц. анализ и его прил., 8:3 (1974), 54–66.

[6] Б.А. Дубровин, *Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов*, Функц. анализ и его прил., 9:1 (1975), 65–66.

[7] А.Р. Итс, В.Б. Матвеев, *Об операторах Хилла с конечным числом лакун,* Функц. анализ и его прил., 9:1 (1975), 69–70.

[8] В.А. Марченко, *Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения*, Киев, Наук. думка, 1977.

[9] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, *Периодические и условно периодические аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза*, ЖЗТФ, 1974, 67:12, 2131–2143.

[10] Б.А. Дубровин, *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов*, Функц. анализ и его прил., 1975, 9:3, 41—-51.

[11] P.D. Lax, *Periodic solutions of KdV equation*, Lect. in Appl. Math, 1974, 15, 85–96.

[12] H.P. McKean, P. van Moerbeke, *The spectrum of Hill's equation*, Invent. Math., 1975, 30:3, 217–274.

[13] А.Р. Итс, В. Б. Матвеев В. Б.,*Операторы Шрёдингера с конечиозонпым спектром и N-солитоиные решения уравнения Кортевега-де Фриза*, Теор. и мат. физ., 1975, 23:1, 51–68.

[14] P.D. Lax, *Periodic solutions of Korteweg-de Vries equation*, Comm, Pure and Appl. Math., 1975, 28, 141–188.

[15] И.М. Кричевер, *Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений*, Докл. АН СССР, 1976, 227:2, 291–294.

[16] И.М. Кричевер, *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, Успехи мат. наук, 1977, 32:6, 183–208.

[17] Н.И. Ахиезер, *Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов,* Докл. АН СССР, 141:2 (1961), 263–266.

[18] И.М. Кричевер, *Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса,* Функц. анализ и его прил., 20:3 (1986), 42–54.

[19] I. Krichever, *Commuting difference operators and the combinatorial Gale transform,* Functional analysis and its applications, 49:3 (2015), 175–188.

[20] I. Krichever, D.H. Phong, *On the integrable geometry of $N = 2$ supersymmetric gauge theories and soliton equations*, J. Differential Geometry **45** (1997) 445–485.

[21] I. Krichever, D. Phong, *Symplectic forms in the theory of solitons,* Surv. Differ. Geometry (1998), 239-313.

[22] M. Toda, *Vibration of a chain with a non-linear interaction*, J. Phys. Soc. Japan **22** (1967), 431–436.

[23] H. Flaschka, *On the Toda lattice II, Inverse scattering solution*, Prog. Theor. Phys., 51 (1974), 703–716.

[24] R. Hirota, *Exact N-soliton solution of a nonlinear lumped network equation*, J. Phys. Soc. Japan, 35 (1973), 286–288.

[25] M. H'enon, Integrals of the Toda lattice, Phys. Rev., B9 (1974), 1921–1923.

[26] H. Flaschka, *The Toda lattice I, Existence of integrals*, Phys. Rev., B9 (1974), 1924–1925.

[27] M. Kac,P. van Moerbeke, A complete solution of the periodic Toda problem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72 (1975), 2879–2880.

[28] E. Date and S. Tanaka, Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hill equation and exact solutions for the periodic Toda lattice, Prog. Theor. Phys. 55 (1976), 457–465.

[29] И.М. Кричевер, *Периодическая неабелева цепочка Тода и ее двумерное обобщение*, Успехи Мат. Наук, 36:2(218), (1981), 72–77.

[30] H. Flaschka, D.W. McLaughlin, *Canonically congugate variables for the Korteweg–de Vries Equation and Toda lattice with periodic boundary conditions*, Prog. Theoret. Phys. 55(1976), 438–456.

[31] A.V. Mikhailov, Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain, JETP Lett. 30 (1979), no. 7, 414–418.

[32] A.V. Mikhailov, The reduction problem and the inverse scattering method, Physica D3 (1981), 73–117.

[33] I. Krichever, *The periodic nonabelian Toda lattice and two-dimensional generalization* Uspekhi Mat. Nauk, 36 (1981), n 2, 72-77.

[34] K. Ueno and K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, K. Okamoto (ed.), Group Representations and Systems of Differential Equations, Advanced Studies in Pure Math. vol. 4, Kinokuniya, Tokyo, 1984, pp. 1–95.

[35] I. Krichever, A. Varchenko, *Incarnations of XXX* $\widehat{\mathfrak{sl}_N}$ *Bethe ansatz equations and integrable hierarchies,* arXiv:1907.12198.

[36] T. Takebe, *Representation theoretical meaning of the initial value problem for the Toda lattice hierarchy I* , Lett. Math. Phys. 21 (1991), 77–84.

[37] T. Takebe, *Representation theoretical meaning of the initial value problem for the Toda lattice hierarchy II*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 27 (1991), 491–503.

[38] A. Alexandrov, A. Zabrodin, *Free fermions and tau-functions*, J. Geom. Phys. 67 (2013) 37–80.

[39] В.Е. Захаров, Л.Д. Фаддеев, *Уравнение Кортевега–де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система,* Функц. анализ и его прил., 5:4 (1971), 18–27.

[40] F. Magri,*A simple model of the integrable Hamiltonian Equation,* J. Math. Phys. (1978) 19, 1156–1162.

[41] M. Gekhtman, M. Shapiro, S. Tabachnikov, A. Vainshtein, *Higher pentagram maps, weighted directed networks, and cluster dynamics,* Electron. Res. Announc. Math. Sci. 19 (2012), 1–17.

[42] V. Ovsienko, S. Tabachnikov, *Coxeter's frieze patterns and discretization of the virasoro orbit*, Journal of Geometry and Physics, 87, 373–381.

[43] V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *The Pentagram Map: A Discrete Integrable System*, Communications in Mathematical Physics, 2010, Volume 299, Issue 2, pp 409–446.

[44] V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, *Quasiperiodic motion for the pentagram map,* Electronic Research Announcements, 2009, 16: 1–8.

[45] Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности*, Докл. АН СССР, 229:1 (1976), 15–18.

[46] А.П. Веселов, С.П. Новиков, *Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения,* ДАН СССР, 279:1 (1984), 20–24.

[47] А.П. Веселов, С.П. Новиков, *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы,* ДАН СССР, 279:4 (1984), 784–788.

[48] С.М. Натанзон, *Несингулярные конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера и примианы вещественных кривых,* Функц. анализ и его прил., 22:1 (1988), 79–80.

[49] С.М. Натанзон, *Примианы вещественных кривых и их приложения к эффективизации операторов Шрёдингера,* Функц. анализ и его прил., 23:1 (1989), 41–56.

[50] С.М. Натанзон, *Дифференциальные уравнения на тэта-функции прима. Критерий вещественности двумерных конечнозонных потенциальных операторов Шредингера,* Функц. анализ и его прил., 26:1 (1992), 17–26.

[51] И.М. Кричевер, *Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения,* УМН, 44:2(266) (1989), 121-184.

[52] И. Тайманов, *Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей*, УМН, 61:1, (2006), 85–164.

[53] I. Krichever, *The averaging method for two-dimensional integrable equations*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22:3 (1988), 37–52.

[54] I. Krichever, *Commuting difference operators and the combinatorial Gale transform,* Functional analysis and its applications, 49:3 (2015) Pages: 175–188.

[55] I.M. Krichever, *Elliptic solutions to difference non-linear equations and nested Bethe ansatz*, Calogero-Moser-Sutherland models, Springer-Verlag, New-York, 1999.

[56] I. Krichever, D.H. Phong, *Spin Chain Models with Spectral Curves from M Theory*, Comm.Math.Phys. 213 (2000), 539–574.

[57] I. Krichever, T. Shiota, *Soliton equations and the Riemann-Schottky problem* - in Advanced lectures in Mathematic, v. 26, Handbook of Moduli, v.II (eds. G.Farcas,I. Morrison), International Press, 2013.

[58] Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, Т.М. Маланюк, В.Г. Маханьков, *Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами,* Физика элемент. частиц и атом. ядра, 19:3 (1988), 579–621.

[59] С. Грушевский, И. Кричевер, Х. Нортон, *Вещественно-нормированные дифференциалы: пределы на стабильных кривых,* УМН, 74:2(446) (2019), 81–148.

[60] А.В. Ильина, И.М. Кричевер, *Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода*, Функц. анализ и его прил., 51:1 (2017), 60–81.

[61] А.В. Ильина, И.М. Кричевер, Н.А. Некрасов, *Двумерные периодические операторы Шредингера, интегрируемые на "собственном" уровне энергии*, Функц. анализ и его прил., 53:1 (2019), 31–48.