МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ОТДЕЛ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

На правах рукописи

ГОРОДКОВ ДЕНИС АЛЕКСАНДРОВИЧ

Комбинаторное вычисление первого класса Понтрягина и приложения

01.01.04 геометрия и топология

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2020

Работа выполнена в отделе геометрии и топологии Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук.

Научный руководитель:
Гайфуллин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН, профессор РАН, главный научный сотрудник отдела геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04).

Официальные оппоненты:
Панина Гаянэ Юрьевна — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04).
Смирнов Евгений Юрьевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений факультета математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (специальность 01.01.06).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится **25 февраля 2021 года** на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://mi-ras.ru/dis/ref20/gorodkov/dis.pdf.

Автореферат разослан ____ декабря 2020 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Королев Максим Александрович

Актуальность темы

Задача о комбинаторном вычислении характеристических классов многообразий является классической задачей алгебраической топологии. Общая постановка задачи такова: пусть даны кусочно линейно инвариантный характеристический класс φ, то есть класс когомологий $\varphi \in H^*(BPL; G)$ классифицирующего пространства BPL и кусочно линейное многообразие M с зафиксированной комбинаторной триангуляцией K. Требуется предъявить способ подсчета $\varphi(M)$, использующий только данные триангуляции как абстрактного симплициального комплекса. Желаемым ответом обычно считается симплициальный цикл (на исходной триангуляции или ее подразбиении), представляющего класс гомологий, двойственный φ.

В случае классов Штифеля-Уитни касательного расслоения триангулированного гладкого многообразия (в дальнейшем под характеристическими классами гладкого многообразия подразумеваются именно характеристические классы касательного расслоения) задача комбинаторного вычисления, поставленная Е. Штифелем [37], была решена Х. Уитни в 1940 году [39]. Независимо и более аккуратно задачу решили С. Гальперин и Д. Толедо в 1972 году [27]. Ее ответ очень легко сформулировать: для n-мерного гладкого многообразия M и его гладкой триангуляции K цикл, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре $w_i(TM) \in H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, i-му классу Штифеля-Уитни, можно выбрать как сумму по модулю 2 всех $(n-i)$-мерных симплексов барицентрического подразделения K'. Р. Гольдстейн и Е. Тёрнер [25] предъявили способ комбинаторно вычислять представляющие классы Штифеля-Уитни как циклы на исходной триангуляции, а не на K', а также, пользуясь кусочно линейной инвариантностью классов Штифеля-Уитни, обобщили формулу для классов Штифеля-Уитни произвольного эйлерова многообразия. При этом формулировка ответа остается прежней. В дальнейшем в рамках текущей работы мы будем рассматривать исключительно характеристические классы касательного расслоения.

Другим классическим семейством характеристических классов векторных расслоений являются классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M;\mathbb{Z})$. Хронологически первым было определение классов Понтрягина касательного расслоения в терминах циклов особенностей наборов векторных полей с ограничениями сверху на ранги подсистем. Таккже классы Понтрягина можно определить через клеточное разбиение многообразия Грассмана как специальные порождающие классы когомологий. Дифференциально геометрический подход к определению классов Понтрягина позволяет записать вещественные классы Понтрягина в терминах когомологий де Рама как интегралы некоторых сверток тензора кривизны гладкого риманова многообразия M. В общем случае классы Понтрягина являются целочисленными характеристическими классами векторных расслоений. Все эти определения были введены Понтрягиным в работах [12–16].

Рациональные классы Понтрягина $p_i \in H^{4i}(M;\mathbb{Q})$, в отличие от целочисленных, являются комбинаторными инвариантами, как показали В. А. Рохлин и А. С. Шварц [17] и, независимо, Р. Том [38], а также определены для всех кусочно линейных многообразий. Доказательство основано на формуле Хирцебруха о сигнатуре и результатах Тома о реализации циклов, а также определенности L-классов Хирцебруха для кусочно линейных многообразий. В случае топологической категории верна классическая теорема С. П. Новикова [11], утверждающая, что рациональные классы Понтрягина являются топологическими инвариантами. Задача о нахождении комбинаторной формулы для рациональных классов Понтрягина была одной из центральных задач алгебраической топологии в начале 1970х годов. Попытки решения этой задачи привели, в частности, к созданию теории Черна-Саймонса [22]. В знаменитой работе 1975 года А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд и М. В. Лосик строят формулу для первого класса Понтрягина триангулированного гладкого многообразия. На каждом симплексе максимальной размерности триангуляции гладкого многообразия выбирается плоская связность, в результате чего на симплексах меньших размерностей возникает несколько связностей, по одной с каждой связности на объемлющих симплексах максимальной размерности.

Габриэлов, Гельфанд и Лосик построили формулу для p_1 в терминах этих индуцированных связностей. Необходимо отметить, что при таком подходе помимо триангуляции многообразия M для подсчета первого класса Понтрягина $p_1(M)$ необходимо фиксировать сглаживание M. Эту процедуру весьма сложно проделать явно. Более того, по этой причине формула Габриэлова-Гельфанда-Лосика применима только для комбинаторных многообразий, являющихся триангуляциями гладких многообразий. В работах [4, 34] посредством усреднения по всем сглаживаниям были получены симплициальные циклы, зависящие только от комбинаторного строения триангуляции, однако процесс усреднения в общем случае не описывается явно в комбинаторных терминах. На настоящий момент единственное комбинаторное многообразие, для которого удалось полностью провести подсчет первого класса Понтрягина посредством формулы Габриэлова-Гельфанда-Лосика, – это минимальная триангуляция комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2_9$ с 9 вершинами [35].

Основным объектом в работах Габриэлова-Гельфанда-Лосика являются пространства конфигураций комбинаторных сфер. Сложность вычислений связана, в первую очередь, со сложностью устройства этого пространства. Переход от пространств конфигураций к ориентированным матроидам позволили И. М. Гельфанду и Р. Макферсону [24] написать формулу для старших классов Понтрягина, однако все еще применимую лишь в случае триангуляции гладкого многообразия и требующую неконтролируемого количества барицентрических подразбиений исходной триангуляции.

Принципиально другой подход к задаче о комбинаторном вычислении классов Понтрягина принадлежит Джеффу Чигеру [21]. Основная идея состоит во введении кусочно евклидовой метрики на комбинаторном многообразии и рассмотрении операторов Лапласа на линках симплексов многообразия. Тогда классы Понтрягина можно выразить через спектры этих операторов Лапласа. Однако при таком подходе конкретные вычисления также очень сложны (более того, не всегда возможны), а спектры операторов Лапласа явно не выражаются в комбинаторных терминах, поэтому подход Дж. Чигера нельзя рассматривать как комбинаторную формулу, хотя он и предоставляет крайне интересную связь между аналитическими и топологическими инвариантами многообразий.

Наконец, в 2004 году А. А. Гайфуллин в работе [5] предложил алгоритм подсчета первого рационального класса Понтрягина для произвольного комбинаторного многообразия M, использующий только комбинаторные данные и применимый на практике. В работе [5] описывается множество всех локальных формул для $p_1(M)$. *(Универсальной) локальной* формулой для характеритического класса $F \in H^k(M;\mathbb{Q})$ называется запись цикла

$$f_\sharp(M) = \sum_{\sigma^{n-k}\in M} f(\operatorname{link}\sigma)\sigma,$$

где $f_\sharp \in C_{n-k}(M;\mathbb{Q})$ является циклом для всякого комбинаторного многообразия M, представляющим класс гомологий, двойственный к F, а f – функция на множестве $(k-1)$-мерных ориентированных комбинаторных сфер. Локальность формулы состоит в том, что коэффициент в искомом цикле $f_\sharp$ зависит только от комбинаторики линка симплекса σ. При этом функция f также не зависит и от многообразия M, и поэтому формула называется универсальной. Существование локальных формул обеспечивается результатом Н. Левитта и К. Рурка 1978 года [32]. Построив подходящую модель классифицирующего пространства $B\widetilde{PL}_m$, Левитт и Рурк доказывают, что для любого однородного полинома от классов Понтрягина существуют локальные формулы. Множество всех локальных формул описывается в [5] в терминах бизвездных преобразований, локальных преобразований комбинаторных многообразий, заменяющих полный подкомплекс полной размерности $\sigma * \partial\tau$ на комплекс $\partial\sigma * \tau$. Если две трехмерных комбинаторных сферы L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β, то значение функции f, задающей локальную формулу для первого рационального класса Понтрягина, должно изменяться следующим образом: $f(L_2) - f(L_1) = \sum h(\beta_v)$. Здесь суммирование ведется по всем общим вершинам L_1 и L_2, в линках которых индуцируются бизвездные преобразования двумерных комбинаторных сфер, β_v – индуцированные бизвездные преобразования в $\operatorname{link} v$, а h – функция на бизвездных преобразованиях двумерных комбинаторных сфер. На h накладывается следующее ограничение: в графе Γ_2, вершины которого соответствуют двумерным ориентированным комбинаторным сферам, а ребра – бизвездным преобразованиям между ними, функция h является коциклом, представляющим некоторый фиксированный, явно описываемый класс когомологий c. Для подсчета значений класса c на произвольном цикле в графе Γ_2 необходимо указать набор порождающих и алгоритм разложения в пространстве циклов $Z_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$. Это было проделано в работе [8], однако в алгоритме разложения были пропущены несколько случаев, и в первой главе диссертации мы устраняем неточность в предыдущем доказательстве. Полный обзор по существующим подходам к задаче о комбинаторном вычислении классов Понтрягина был написан А. А. Гайфуллиным [6].

Важной задачей, возникающей после нахождения всех возможных локальных формул, является указание конкретной локальной явно вычислимой формулы. Это эквивалентно нахождению естественного представителя $h \in C^1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ класса когомологий c. Решение этой задачи — один из основных результатов этой диссертации.

Вторая глава диссертации посвящена явному вычислению первого класса Понтрягина 8-мерного комбинаторного многообразия Брема-Кюнеля с 15 вершинами, являющегося кандидатом в минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$. Кроме того, в ней реализован алгоритм Гайфуллина компьютерной программой, которая эффективно работает для всех существующих примеров комбинаторных многообразий, описанных явно.

Минимальной триангуляцией кусочно линейного многообразия X называется такое комбинаторное многообразие, что среди всех триангуляций X у него наименьшее количество вершин.

Задача о нахождении минимальных триангуляций возникла как естественная задача в комбинаторной топологии. Тривиальным замечанием является то, что минимальная триангуляция n-мерной сферы – граница $n+1$-мерного симплекса, соответственно, в ней $n+2$ вершины. Для произвольного многообразия найти минимальную триангуляцию представляется безнадежной задачей, однако имеется несколько случаев, где задача полностью решена. Часто для нахождения требуется использования компьютера, что объясняет столь поздние результаты в этой области даже в простых случаях. В случае двумерных поверхностей Дж. Хивуд еще в 1890 году [28] нашел оценку на количество вершин, используя эйлерову характеристику, а Юнгерман и Рингель в 1980 году [29] построили явно примеры, доказывающие точность оценки. Достигнутая оценка (за исключением сферы с двумя ручками, бутылки Клейна и неориентируемой поверхности рода 3 – там оценка получена явно) следующая: если n – количество вершин, то $C_{n-3}^2 \geqslant 3(2-\chi(M))$ – необходимое и достаточное условие для того, чтобы поверхность M была триангулируема в n вершин. В частности, минимальной триангуляция будет, если неравенство выродится в равенство. Из общих оценок отдельно хочется отметить работу [19] Ульриха Брема и Вольфганга Кюнеля 1987 года, в которой авторы находят некоторые ограничения на количество вершин v в зависимости от размерности многообразия n. Они получили, что если многообразие M не является сферой, то $v \geqslant 3\lceil n/2 \rceil + 3$, причем равенство может достигаться только в случае $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ или $n = 16$. Более того, при таких n при достижении равенства многообразие M является многообразием Илса-Кёйпера, то есть допускает кусочно линейную функцию Морса с ровно тремя критическими точками. Естественными примерами таких многообразий являются проективные плоскости над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. В частности, в размерности 2 равенству удовлетворяет только минимальная триангуляция $\mathbb{R}P_6^2$ вещественной проективной плоскости в 6 вершин, а в размерности 4 – только минимальная триангуляция $\mathbb{C}P_9^2$ комплексной проективной плоскости.

В размерности 8 три различных примера комбинаторных многообразий (кусочно линейно гомеоморфных друг другу) с 15 вершинами, не гомеоморфного сфере, были построены в 1992 году У. Бремом и В. Кюнелем [20]. Эти многообразия являются многообразиями Илса-Кёйпера. Брем и Кюнель выдвинули гипотезу, что эти комбинаторные многообразия являются триангуляциями кватернионной проективной плоскости. В размерностях 8 и 16 многообразия Илса-Кёйпера классифицируются своими числами Понтрягина, поэтому для доказательства этой гипотезы достаточно посчитать числа Понтрягина трех комбинаторных многообразий, построенных Бремом и Кюнелем, и сравнить их с числами Понтрягина кватернионной проективной плоскости. Доказательству этой гипотезы посвящена первая часть текущей диссертации. В размерности 16 на момент написания не известно примеров комбинаторных многообразий с 27 вершинами, не являющихся триангуляцией сферы.

Таким образом, получается отдельное семейство многообразий с естественно появляющейся минимальной триангуляцией — проективные плоскости.

Для проективной плоскости над октавами никаких явных результатов на данный момент нет. Единственная бесконечная (по размерности) серия многообразий, для которых известны минимальные триангуляции, кроме сфер, — скрученные произведения сфер. Этот результат был получен Кюнелем в 1986 году [31]. Скрученным (устоявшегося перевода нет, анг. twisted) произведением сфер называется следующее многообразие M^n: $M^n = S^{n-1} \times S^1$ при четных n, и $M^n = S^{n-1} \rtimes S^1$ при нечетных n. Количество вершин – $2n+3$. Перечислим все многообразия, для которых на данный момент известны минимальные триангуляции: сферы любой размерности, двумерные поверхности, скрученные произведения сфер, $S^2 \times S^1$, $\mathbb{R}P^3$, линзовое пространство $L(3,1)$, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $(S^2 \times S^2)\sharp(S^2 \times S^2)$, $\mathbb{R}P^4$, $S^3 \times S^2$, $S^3 \times S^3$ [33]. Для большинства других многообразий в маленьких размерностях известны кандидаты в минимальные триангуляции, однако минимальность не удаётся доказать. Для многообразий произвольной размерности в большинстве случаев неизвестны примеры триангуляций как таковых. Из примеров, представляющий наибольший интерес, отметим кандидата в минимальные триангуляции трехмерной гомологической сферы Пуанкаре (см. [18]).

Цель диссертации

Целью диссертации является доказательство гипотезы Брема-Кюнеля о кусочно линейной гомеоморфности некоторого специального 8-мерного комбинаторного многообразия кватернионной проективной плоскости, явная реализация формулы Гайфуллина для первого рационального класса Понтрягина комбинаторного многообразия, а также построение формулы для первого рационального класса Понтрягина в терминах перераспределения комбинаторной кривизны при бизвездных преобразованиях двумерных комбинаторных сфер.

Методы исследования

В работе используются методы алгебраической топологии и комбинаторной топологии.

Научная новизна

Основные новые научные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Исправлен алгоритм разложения цикла в графе Γ_2 на элементарные циклы, приведенный в [8]. Реализация алгоритма Гайфуллина посредством компьютерной программы.

2. Доказана гипотеза Брема-Кюнеля о гомеоморфности комбинаторного многообразия M^8_{15} кватернионной проективной плоскости.

3. Предъявлен канонический выбор локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина (среди множества всех локальных комбинаторных формул, явно описанного в [5]).

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по алгебраической топологии.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

1. **06/16** *Международная молодежная школа-конференция "Шестая летняя школа по геометрии и математической физике", Красновидово, Россия;* "Minimal triangulations of projective planes"

2. **08/16** *Международная конференция "XIX Geometrical Seminar", Златибор, Сербия;* "A 15-vertex triangulation of the quaternionic projective plane"

3. **09/16** *Международная конференция "Геометрические дни в Новосибирске – 2016", Новосибирск, Россия;* "Три минимальных триангуляции кватернионной проективной плоскости"

4. **09/16** *Международная конференция “Вероятность, анализ и геометрия”, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* ”Минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости”

5. **10/16** *Семинар “Узлы и теория представлений”, МГУ им. М. В. Ломоносова; “Комбинаторные характеристические классы и минимальные триангуляции”*

6. **10/18** *Семинар “Stanford Topology Seminar”, Stanford, CA, USA;* “Combinatorial characteristic classes and the minimal triangulation of the quaternionic projective plane”

7. **08/19** *Международная конференция “Топология, геометрия и динамика: Рохлин – 100”, Математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия;* “Триангуляции кватернионной проективной плоскости и классы Понтрягина”

8. **10/19** *Семинар отдела геометрии и топологии МИАН “Геометрия, топология и математическая физика”, Москва, Россия;* “Перераспределение кривизны при бизвездных преобразованиях и комбинаторная формула для первого класса Понтрягина”

9. **12/19** *Семинар “Характеристические классы и теория пересечений”, Москва, Россия;* “Redistribution of curvature under bistellar flips and a combinatorial formula for the first Pontryagin class”

Публикации

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в 3 работах [9, 10, 26], ссылки на которые даны в библиографии в конце автореферата.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

Содержание работы

Здесь мы опишем структуру диссертации. Нумерация утверждений согласована с нумерацией, используемой в диссертации.

Во **введении** приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации, а также вводится список основных обозначений и соглашений. Укажем здесь определение бизвездного преобразования, используемое повсеместно в текущей работе, и важные соглашения об обозначениях.

Бизвездным преобразованием $\beta_{M,\sigma}$ комбинаторного многообразия M называется преобразование β, заменяющее полный подкомплекс полной размерности $\sigma * \partial\tau$ в M на комплекс $\tau * \partial\sigma$, где σ и τ – симплексы. (Используются соглашения $\partial\,\mathrm{pt} = \varnothing$, $\sigma * \varnothing = \sigma$.)

Вершины M, присутствующие в M и в образе M под действием бизвездного преобразования β, линки которых изменяются под действием β, будем называть *участвующими* в β, и множество всех таких вершин будем обозначать $U(\beta)$.

Пусть $\beta\colon L_1 \rightsquigarrow L_2$ – бизвездное преобразование. Если σ или τ – вершина, то множество вершин в L_1 и L_2 не совпадает. Пусть вершина $v \in U(\beta)$ участвует в преобразовании β. Тогда β индуцирует бизвездное преобразование β_v из $\mathrm{link}_{L_1} v$ в $\mathrm{link}_{L_2} v$.

Изоморфизмом комбинаторных многообразий M_1 и M_2 мы будем называть линейный на симплексах гомеоморфизм, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между симплексами многообразий M_1 и M_2. Мы будем в рамках данной работы пользоваться обозначением $M_1 \cong M_2$. Заметим, что это определение не совпадает с кусочно линейным гомеоморфизмом комбинаторных многообразий.

Глава 1. Алгоритм разложения цикла бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер

В первой главе приводятся необходимые для дальнейшего конструкции и определения, а также описан алгоритм Гайфуллина [5] нахождения первого рационального класса Понтрягина комбинаторного многообразия. В разделе 1.1 мы определяем основные для данной диссертации структуры графа Γ_2 и комплекса $\mathcal{T}^n$ и формулируем результаты, приводящие к комбинаторной формуле для первого класса Понтрягина, построенной в [5].

Граф Γ_2 определяется следующим образом: его вершинами являются классы изоморфизма двумерных ориентированных комбинаторных сфер, а ребрами — существенные бизвездные преобразования между этими сферами. Направление бизвездного преобразования задает ориентацию соответствующего ребра в графе. Назовем *элементарными циклами первого типа* циклы в графе Γ_2, состоящие из последовательных ребер, соответствующих преобразованиям β_{L,σ_1}, β_{L_1,σ_2}, $\beta^{-1}_{L_2,\sigma_1}$ и β^{-1}_{L,σ_2}, где L, L_1, L_2, σ_1 и σ_2 таковы, что $L_1 = \beta_{L,\sigma_1}(L)$, $L_2 = \beta_{L,\sigma_2}(L)$ и все указанные бизвездные преобразования корректно определены. *Элементарными циклами второго типа* называется специальное семейство из трех различных видов циклов, изображенное на рис. 1.

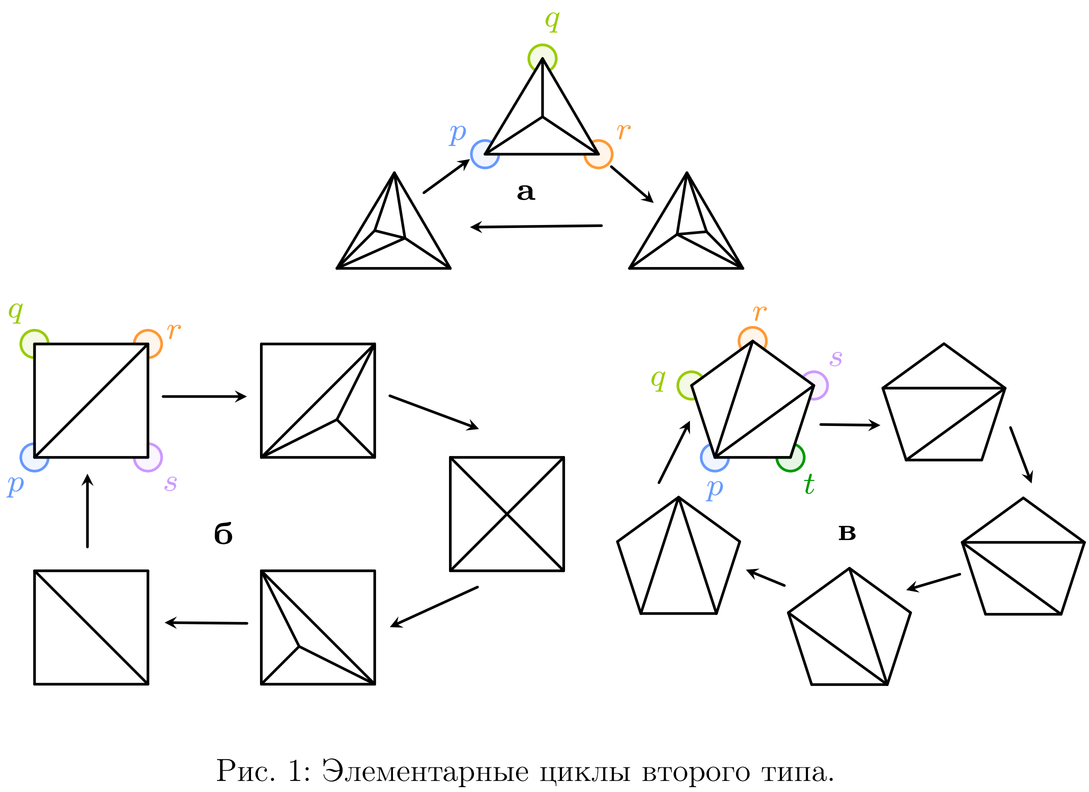

Рис. 1: Элементарные циклы второго типа.

Предложение 0.0.1 (А. А. Гайфуллин, [5])**.** Всякий цикл в графе Γ_2 раскладывается в сумму элементарных циклов первого и второго типов.

В работе [5] А. А. Гайфуллин построил локальную формулу для первого рационального класса Понтрягина в терминах некоторого специального класса когомологий $c \in H^1(\Gamma_2;\mathbb{Q})$ на графе Γ_2, значения которого на элементарных циклах заданы явно. Для непосредственного подсчета значений

c на произвольном цикле нужно конструктивное доказательство предложения 0.0.1. Оно было приведено в статье [8], однако в алгоритме разложения в сумму элементарных циклов были пропущены некоторые случаи, в работе же [5] приведено неконструктивное доказательство предложения 0.0.1.

В разделе 1.2 мы приводим полное конструктивное доказательство предложения 0.0.1. Доказательство ведется по индукции, при помощи введения дополнительной функции сложности на множестве вершин и ребер графа Γ_2.

В разделе 1.3 мы описываем алгоритм подсчета класса p_1 произвольного комбинаторного многообразия L из [5], необходимый нам для результатов в следующей главе. Приведем основные шаги алгоритма:

1. Найти последовательности бизвездных преобразований, сводящие линк каждого $(n-4)$-симплекса σ комплекса L к границе стандартного симплекса $\operatorname{link}_L \sigma = L_0 \rightsquigarrow L_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow L_k$. Пусть V_σ — объединение множества всех вершин комбинаторных сфер $L_0, \ldots, L_k$, где вершины v_1 и v_2 комбинаторных сфер L_i и L_{i+1} отождествляются, если v_1 переходит в v_2 под действием соответствующего бизвездного преобразования $L_i \rightsquigarrow L_{i+1}$. Будем также считать, что все новые появляющиеся вершины имеют номера, не встречавшиеся в предыдущих преобразованиях последовательности.

2. Для каждого $(n-4)$-мерного симплекса σ и для каждой вершины v рассмотрим последовательности индуцированных бизвездных преобразований $\operatorname{link}_{L_l} v \rightsquigarrow \operatorname{link}_{L_{l+1}} v \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \operatorname{link}_{L_j} v$, где $l = \min\{p \,|\, v \in L_p\}$, $j = \max\{p \,|\, v \in L_p\}$. При этом $\forall p \in [l, j]$ верно, что $v \in L_p$ в силу соглашения о новой нумерации новых возникающих вершин. Кроме этого заметим, что $\operatorname{link}_{L_j} v$ есть симплициальный комплекс, комбинаторно эквивалентный границе трехмерного симплекса.

3. Для каждой получившейся цепочки бизвездных преобразований, сводящей 2-мерную комбинаторную сферу $\operatorname{link}_{L_l} v$ к границе 3-симплекса, замкнуть эту цепь в цикл в комплексе Γ_2 любым способом, однозначно строящимся по комбинаторному типу исходной сферы.

4. Получившиеся циклы - циклы в графе Γ_2. Разложить эти циклы в виде линейной комбинации элементарных циклов.

5. Посчитать значение класса когомологий c на каждом участвующем элементарном цикле, получить для каждого σ вклад $f\,(\operatorname{link}\sigma)$ и построить цикл
$$f_\sharp(L) = \sum_{\sigma\in L, \dim\sigma = n-4} f\,(\operatorname{link}\sigma)\;\sigma,$$
представляющий элемент в гомологиях, двойственный к первому классу Понтрягина.

Глава 2. Минимальные триангуляции кватернионной проективной плоскости

Вторая глава посвящена доказательству гипотезы Брема–Кюнеля о минимальной триангуляции кватернионной проективной плоскости. В разделах 2.1 и 2.2 мы излагаем известные необходимые результаты, приводящие к гипотезе Брема–Кюнеля: классификацию многообразий Илса–Кёйпера, то есть многообразий, допускающих функцию Морса с тремя критическими точками, и теорему Брема–Кюнеля о возможном количестве вершин замкнутых комбинаторных многообразий.

Теорема 2.1.5 (Илс, Кёйпер [23])**.** Пусть на многообразии X^n задана функция Морса $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ с ровно тремя критическими точками. Тогда:

1. Размерность и когомологии.

   Размерность X^n может быть равна только $n = 2m = 0,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$, причем кольцо когомологий $H^*(X)$ совпадает с кольцом когомологий трех точек (в случае $n = 0$), вещественной ($n = 2$), комплексной ($n = 4$), кватернионной ($n = 8$) или октавной ($n = 16$) проективной плоскости.

2. Гомотопический тип.

   Если $n = 0$, то X состоит из трех точек. Если $n = 2$, то X гомеоморфно вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. При $n = 4$ возможен один гомотопический тип X, соответствующий $\mathbb{C}P^2$, при $n = 8$ – шесть гомотопических типов, а при $n = 16$ – шестьдесят гомотопических типов.

3. Топологически, X – компактификация евклидова пространства $\mathbb{R}^{2m}$ m-сферой S^m.

4. В кусочно линейном случае, имеется бесконечно много различных примеров искомых многообразий с точностью до кусочно линейного изоморфизма в размерностях $n = 8$ и $n = 16$. Они различимы по своим рациональным числам Понтрягина. При этом не все они допускают введение гладкой структуры.

5. С дифференциальной точки зрения (в категории гладких многообразий), имеется бесконечное множество возможных X в размерностях 8 и 16. Ассоциированные комбинаторные структуры классифицируются по своим рациональным числам Понтрягина. С каждой допустимой комбинаторной структуре могут быть ассоциированны не более 2 гладких структур, однако точное количество в каждом случае неизвестно. Числа Понтрягина соответствующих гладких многообразий могут быть равны $p_1^2[X] = 2^2(2h-1)^2, p_2[X] = (45 + 2^2(2h-1)^2)/7$, где $h(h-1)/56 \in \mathbb{Z}$. В размерности $n = 2$ имеется лишь вещественная проективная прямая. В размерности $n = 4$ полных результатов нет.

Теорема 2.2.2 (Брем, Кюнель [19]). **Пусть** M^n – компактное комбинаторное многообразие с d вершинами. Тогда если $d < \left\lceil \dfrac{3n}{2} \right\rceil + 3$, то M PL-гомеоморфно сфере, а если $d = \dfrac{3n}{2} + 3$, то M может быть не PL-гомеоморфным сфере только в случае, если $d = 2, 4, 8$ или 16. В этом случае M^n является многообразием Илса-Кюйпера.

Брем и Кюнель (см. [20]) построили три 15-вершинных кусочно линейно гомеоморфных комбинаторных многообразия M_{15}^8, $\widetilde{M}_{15}^8$ и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$, не гомеоморфных сфере, в качестве кандидатов в триангуляции кватернионной проективной плоскости, однако доказать гомеоморфность $M_{15}^8 \cong \mathbb{H}P^2$ не смогли. Из теоремы 2.2.2 следует, что эти многообразия являются многообразиями Илса-Кёйпера. Кроме того, из теоремы 2.1.5 и из теоремы Хирцебруха о сигнатуре следует предложение 2.2.4, которое сводит проверку гомеоморфности к подсчету чисел Понтрягина M_{15}^8.

Предложение 2.2.4. Если $p_1^2\left[M_{15}^8\right] = p_1^2\left[\mathbb{H}P^2\right]$, то M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно $\mathbb{H}P^2$ и является его триангуляцией, минимальной по количеству вершин.

Из-за величины комплекса M^8_{15} подсчет его чисел Понтрягина вручную — крайне трудоемкая задача, поэтому была реализована компьютерная программа, которая в общем случае по комбинаторному многообразию считает его первый рациональный класс Понтрягина по алгоритму [5]. В разделе 2.3 мы разбираем изменения в алгоритме подсчета первого рационального класса Понтрягина, связанные с использованием компьютера в подсчете первого класса Понтрягина комбинаторного многообразия M^8_{15} и предъявляем доказательство гипотезы Брема-Кюнеля. Основной результат второй главы заключается в следующей теореме:

Теорема 2.3.3. M^8_{15}, $\widetilde{M}^8_{15}$ и $\widetilde{\widetilde{M}}^8_{15}$ являются минимальными триангуляциями $\mathbb{H}P^2$.

Глава 3. Явный представитель формулы для первого класса Понтрягина в терминах перераспределения кривизны двумерных комбинаторных сфер

Основной результат третьей главы заключается в предъявлении канонического выбора локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина (среди множества всех локальных комбинаторных формул, явно описанного в [5]).

В разделе 3.1 диссертации определен обобщенный коэффициент зацепления двух 1-циклов в 3-мерной сфере и сформулирован основной результат главы.

Сначала в параграфе 3.1.1 по бизвездному преобразованию ориентированных двумерных сфер строится трехмерная сфера L_β и определяется некоторый специальный цикл $\xi_\beta \in Z_1(M;\mathbb{Q}) \otimes Z_1(M;\mathbb{Q})$.

Нам понадобится следующее определение: *комбинаторной кривизной* в вершине v двумерной симплициальной сферы L назовем число $W_L(v) = 1-\frac{d_v}{6}$, где d_v – степень вершины v. Сумма кривизн во всех вершинах равна эйлеровой характеристике сферы, то есть 2.

По бизвездному преобразованию $\beta\colon L_1 \rightsquigarrow L_2$ ориентированных двумерных симплициальных сфер построим ориентированную трехмерную симплициальную сферу $L_\beta = \operatorname{cone} L_1 \cup \operatorname{cone} L_2 \cup (\sigma * \tau)$, где конусы склеиваются по общему подкомплексу $L_1 \backslash \operatorname{Int}(\sigma * \partial\tau) = L_2 \backslash \operatorname{Int}(\partial\sigma * \tau)$. Вершину конуса $\operatorname{cone} L_i$ обозначим через a_i.

Далее, преобразованию β сопоставим набор $\mathcal{H}$ симплициальных цепей $\eta \in C_1(L_\beta;\mathbb{Q})$ с весами, обозначаемыми через $W(\eta)$, по следующим правилам.

(1) Для каждой вершины w, присутствующей в обеих сферах L_1 и L_2, включим в набор $\mathcal{H}$ цепь $\eta = [a_1, w] + [w, a_2]$ с весом

$$W(\eta) = \begin{cases} W_{L_1}(w) = W_{L_2}(w), & \text{если } w \notin \sigma * \tau, \\ W_{L_2}(w)\ (\neq W_{L_1}(w)), & \text{если } w \in \sigma, \\ W_{L_1}(w)\ (\neq W_{L_2}(w)), & \text{если } w \in \tau. \end{cases}$$

(2) Для каждой пары вершин $w_1 \in \sigma$, $w_2 \in \tau$ включим в набор $\mathcal{H}$ цепь $\eta = [a_1, w_1] + [w_1, w_2] + [w_2, a_2]$ с весом $W(\eta) = -1/12$, если σ и τ – ребра, и $W(\eta) = 1/6$, если σ или τ – вершина.

Предложение 3.1.2. Цепь $\xi(\beta) \in C_1(L_\beta;\mathbb{Q}) \otimes C_1(L_\beta;\mathbb{Q})$, определяемая по формуле

$$\xi(\beta) = \sum_{\eta_1,\eta_2 \in \mathcal{H}} W(\eta_1)W(\eta_2)\eta_1 \otimes \eta_2 - 2\sum_{\eta \in \mathcal{H}} W(\eta)\eta \otimes \eta,$$

является циклом по отношению к дифференциалу $\partial \otimes 1 - 1 \otimes \partial$.

Затем, в параграфе 3.1.2 описывается определение обобщенного коэффициента зацепления циклов в трехмерной сфере, что дает возможность сформулировать в параграфе 3.1.3 основную теорему 3.1.5.

Пусть M – ориентированная трехмерная симплициальная сфера и $Z_1(M;\mathbb{Q}) \subset C_1(M;\mathbb{Q})$ – ядро граничного оператора. Для циклов $\varphi, \psi \in Z_1(M;\mathbb{Q})$ с непересекающимися носителями определен их коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(\varphi,\psi) \in \mathbb{Q}$. Для произвольных $\varphi, \psi \in Z_1(M;\mathbb{Q})$ определим их *обобщенный коэффициент зацепления* по формуле $\widetilde{\mathrm{lk}}(\varphi,\psi) = \mathrm{lk}(\varphi, \mathrm{Shift}(\psi))$, где $\mathrm{Shift}\colon C_1(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow C_1(M^*;\mathbb{Q})$ – оператор сдвига цепи в двойственное разбиение M^*. Оператор Shift определяется явно и переводит каждое ребро в цепь с носителем в объединении клеток, двойственных вершинам этого ребра. Отображение $\widetilde{\mathrm{lk}}$ продолжается линейно на $Z_1(M;\mathbb{Q}) \otimes Z_1(M;\mathbb{Q})$.

Согласно теореме У. Пахнера [36] любая трехмерная симплициальная сфера может быть получена из границы симплекса $\partial\Delta^4$ при помощи последовательности бизвездных преобразований.

Теорема 3.1.5. Зададим функцию f на множестве ориентированных трехмерных симплициальных сфер индуктивно по формулам

$$f(\partial\Delta^4) = 0 \qquad \text{и} \qquad f(L_2) - f(L_1) = \sum \widetilde{\mathrm{lk}}(\xi(\beta_v)),$$

если L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β. Здесь суммирование ведется по всем вершинам $v \in \sigma * \tau$, присутствующим в обеих сферах L_1 и L_2, и β_v обозначает бизвездное преобразование двумерных сфер, индуцированное преобразованием β в линке вершины v. Тогда f корректно определена и соооответствующий цикл $f_\sharp(M^n)$, определенный по формуле

$$f_\sharp(M^n) = \sum_{\sigma\in M^n\,,\dim\sigma = n-4} f(\mathrm{link}\,\sigma)\sigma,$$

представляет класс $p_1(M^n)$.

В разделе 3.2 представлено доказательство этой теоремы.

Параграф 3.2.1 посвящен следующему необходимому техническому результату:

Предложение 3.2.1. Абелева группа $Z_1(\Gamma_2;\mathbb{Z})$ всех циклов в графе Γ_2 порождена элементарными циклами первого типа.

Доказательство основано на явном выражении всех элементарных циклов второго типа через элементарные циклы первого типа как 1-циклов в графе Γ_2. Оно проводится по индукции по количеству вершин, не участвующих в конкретном цикле второго типа.

Кроме этого, в параграфе 3.2.1 указываются результаты статьи [5], классифицирующие все локальные комбинаторные формулы для первого рационального класса Понтрягина:

Предложение 3.2.3 ([5], Теорема 3.1)**.** Пространство всех локальных комбинаторных формул $f \in \mathcal{T}^4$ для первого рационального класса Понтрягина находится во взаимно однозначном соответствии с пространством 1-коциклов графа Γ_2, представляющих класс когомологий $c \in H^1(\Gamma_2;\mathbb{Q})$.

Здесь класс когомологий c указывается явно своими значениями на элементарных циклах.

Таким образом, основная теорема 3.1.5 следует из следующего утверждения:

Предложение 3.2.4. Пусть $a = \sum_i k_i \beta_i \in C_1(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ — цепь в графе Γ_2. Коцикл $h \in C^1(\Gamma_2, \mathbb{Q})$, заданный формулой $h(a) = \sum_i k_i \widetilde{\mathrm{lk}}(\xi(\beta_i))$, представляет класс когомологий c.

В силу предложения 3.2.1 для доказательства предложения 3.2.4 достаточно посчитать значения коцикла h на элементарных циклах первого типа.

Параграф 3.2.2 посвящен построению по элементарному циклу первого типа двумерных ориентированных комбинаторных сфер четырехмерной сферы L_{β_1,β_2}.

Элементарному циклу первого типа сопоставим ориентированную четырехмерную комбинаторную сферу L_{β_1,β_2} следующим образом. Если β_1 и β_2 — бизвездные преобразования, ассоциированные с одномерными симплексами, то множества вершин двумерных комбинаторных сфер L, L_1, L_2 и L_{12} естественно отождествляются друг с другом; обозначим это множество вершин через T. Если одно или оба из преобразований β_1 и β_2 ассоциированы с нульмерными или двумерными симплексами, то обозначим через T множество вершин той из двумерных комбинаторных сфер L, L_1, L_2 и L_{12}, которая содержит наибольшее число вершин; тогда множества вершин остальных трёх комбинаторных сфер естественно отождествляюся с подмножествами множества T. Рассмотрим симплициальный комплекс L_{β_1,β_2} на множестве вершин $T \cup \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, состоящий из следующих четырехмерных симплексов и всех их граней

- $a_1 * b_1 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L,
- $a_2 * b_1 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L_1,
- $a_1 * b_2 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L_2,
- $a_2 * b_2 * \rho$ для всякого двумерного симплекса ρ комплекса L_{12},
- $b_1 * \sigma_1 * \tau_1$; $b_2 * \sigma_1 * \tau_1$; $a_1 * \sigma_2 * \tau_2$; $a_2 * \sigma_2 * \tau_2$.

Явной проверкой доказывается следующее утверждение:

Предложение 3.2.5. Симплициальный комплекс L_{β_1,β_2} является четырехмерной комбинаторной сферой.

В параграфе 3.2.3 мы строим, по аналогии с набором цепей $\mathcal{H}$ для сферы L_β, набор $\mathcal{N}$ двумерных цепей, и также присваиваем им веса. Аналогичным образом строится и цикл $\zeta \in C_2(L_{\beta_1,\beta_2}) \otimes C_2(L_{\beta_1,\beta_2})$.

Обобщением классического утверждения о связи коэффициента зацепления в линке и формы пересечений на обобщенный коэффициент зацепления, получается предложение 3.2.9:

Предложение 3.2.9. Значение $\cap(\zeta)$ в L_{β_1,β_2} равно сумме обобщенных коэффициентов зацепления одномерных ограничений $\iota_v(\zeta)$ цепи ζ в линках всех вершин v комплекса L_{β_1,β_2}.

Среди всех вершин L_{β_1,β_2} многие имеют линки, такие что ограничения цепи ζ в них не зацеплены (см. лемму 3.2.10). В частности, если на $\operatorname{link}_v L_{\beta_1,\beta_2}$ существует инволюция, обращающая ориентацию и сохраняющая $\iota_v\zeta$, то $\widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_v\zeta) = 0$. Более того, сумма значений обобщенных коэффициентов зацепления цепей $\iota_{a_1}\zeta$, $\iota_{a_2}\zeta$, $\iota_{b_1}\zeta$ и $\iota_{b_2}\zeta$ равна значению h на цикле коммутирующих бизвездных преобразований (см. лемму 3.2.12). Отсюда следует, что

$$h(\beta_1 + \widetilde{\beta}_2 + \widetilde{\beta}_1^{-1} + \beta_2^{-1}) = \widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_{a_1}\zeta) + \widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_{b_1}\zeta) + \widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_{a_2}\zeta) + \widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_{b_2}\zeta) = -\sum_{w\in T} \widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_w\zeta).$$

Если множества участвующих в β_1 и в β_2 вершин не пересекаются, то $h(\beta_1 + \widetilde{\beta}_2^{-1} + \widetilde{\beta}_1 + \beta_2^{-1}) = 0$, что согласуется с соответствующими значениями класса когомологий c.

Линк вершины $w \in L_{\beta_1,\beta_2}$, соответствующий вершине, участвующей в обоих бизвездных преобразованиях, всегда является конкретной трехмерной сферой $L_{p,q}$, где p и q — количества примыкающих к вершине w треугольников, не участвующих в преобразованиях β_1 и β_2.

Несмотря на совпадение линков, подсчет коэффициента зацепления различен для разных пар типов бизвездных преобразований β_1 и β_2, так как различаются наборы $\iota_w\mathcal{N}$. При этом общий подсчет значения h на цикле коммутирующих бизвездных преобразований сводится к вычислению обобщенных коэффициентов зацепления некоторых циклов в фиксированном наборе трехмерных комбинаторных сфер $L_{p,q}$.

Параграф 3.2.4 посвящен явному вычислению $\widetilde{\operatorname{lk}}(\iota_w\zeta)$. В обоих преобразованиях β_1 и β_2 могут участвовать не более двух вершин, поэтому отдельно разбираются случай, когда такая вершина единственна, и когда их две.

Для облегчения подсчета указанного коэффициента зацепления используются предложения 3.2.17 и 3.2.19. Они позволяют не считать явно значения оператора Shift на 1-цепях, вместо этого сводя вычисление к поиску вершин в носителе цепи с изоморфными линками, так что изоморфизм линков сохраняет ограничения 1-цепи в них.

Далее изложен явный подсчет $\widetilde{\mathrm{lk}}(\iota_w\zeta)$ в случае единственной вершины w, участвующей в обоих преобразованиях β_1 и β_2 для случая элементарного цикла первого типа (д) (см. стр. 78), и в леммах 3.2.21, 3.2.21' и 3.2.21" указываются результаты подсчета для всех элементарных циклов первого типа с единственной вершиной w.

Получающиеся значения согласуются с значениями класса когомологий c на этих циклах. Соответственно, остается рассмотреть случай, когда в обоих преобразованиях β_1 и β_2 участвуют две вершины w_1 и w_2. Доказательства, используемые прежде, обобщаются на этот случай для всех циклов, кроме цикла типа (и). Значение на нем коцикла h вычисляется, используя соотношения на элементарные циклы первого типа в графе Γ_2, и совпадает с соответствующим значением класса когомологий c. Это завершает доказательство предложения 3.2.4, и, соответственно, основного результата главы, теоремы 3.1.5.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Александровичу Гайфуллину за постановку задач, решаемых в текущей диссертации, за неоценимый вклад в научное развитие автора и за участие и советы на всех этапах научной деятельности автора.

Список литературы

[1] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “Комбинаторное вычисление характеристических классов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 5–26; *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 186–202.

[2] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “Комбинаторное вычисление характеристических классов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 12–28; *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 103–115.

[3] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “О комбинаторном вычислении характеристических классов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 54–55; *Funct. Anal. Appl.*, **9**:1 (1975), 48–49.

[4] Габриэлов А. М., Гельфанд И. М., Лосик М. В., “Локальная комбинаторная формула для первого класса Понтрягина”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:1 (1976), 14–17; *Funct. Anal. Appl.*, **10**:1 (1976), 12–15.

[5] Гайфуллин А. А., “Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 13–66; *Izv. Math.*, **68**:5 (2004), 861–910.

[6] Гайфуллин А. А., “Вычисление характеристических классов многообразия по его триангуляции”, *УМН*, **60**:4(364) (2005), 37–66; *Russian Math. Surveys*, **60**:4 (2005), 615–644.

[7] Гайфуллин А. А., “Построение комбинаторных многообразий с заданными наборами линков вершин”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 3–62; *Izv. Math.*, **72**:5 (2008), 845–899.

[8] Гайфуллин А. А., “Пространства конфигураций, бизвездные преобразования и комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина”, *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **268**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 76–93; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 70–86.

[9] Гайфуллин А. А., Городков Д. А., “Явный вид локальной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина”, *УМН*, **74**:6(450) (2019), 161–162; *Russian Math. Surveys*, **74**:6 (2019), 1120–1122.

[10] Городков Д. А., “Минимальная триангуляция кватернионной проективной плоскости”, *УМН*, **71**:6(432) (2016), 159–160; *Russian Math. Surveys*, **71**:6 (2016), 1140–1142.

[11] Новиков С. П., “Топологическая инвариантность рациональных классов Понтрягина”, *Докл. АН СССР*, **163**:2 (1965), 298–300.

[12] Понтрягин Л. С., “Характеристические циклы многообразий”, *ДАН СССР*, **35**:2 (1942), 35–39.

[13] Понтрягин Л. С., “Некоторые топологические инварианты римановых многообразий”, *ДАН СССР*, **43**:3 (1944), 95–98.

[14] Понтрягин Л. С., “Характеристические циклы дифференциируемых многообразий”, *Матем. сб.*, **21(63)**:2 (1947), 233–284.

[15] Понтрягин Л. С., “Векторные поля на многообразиях”, *Матем. сб.*, **24(66)**:2 (1949), 129–162.

[16] Понтрягин Л. С., “Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий”, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **13**:2 (1949), 125–162.

[17] Рохлин В. А., Шварц А./,С., “О комбинаторной инвариантности классов Понтрягина”, *ДАН СССР*, **114**:3 (1957), 490–493.

[18] Björner A., Lutz F. H., “Simplicial manifolds, bistellar flips and a 16-vertex triangulation of the Poincaré homology 3-sphere”, *Exp. Math.*, **9**:2 (2000), 275–289.

[19] Brehm U., Kühnel W., “Combinatorial manifolds with few vertices”, *Topology*, **26** (1987), 465–473.

[20] Brehm U., Kühnel W., “15-vertex triangulations of 8-manifolds”, *Math. Ann.*, **294** (1992), 167–193.

[21] Cheeger J., “Spectral geometry of singular Riemannian spaces”, *J. Differential Geom.*, **18**:4 (1983), 575–657.

[22] Chern S., Simons J., “Characteristic Forms and Geometric Invariants”, *Annals of Mathematics*, **99**:1, 48–69.

[23] Eells J., Kuiper N. H., “Manifolds which are like projective planes”, *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.*, **14** (1962), 181—222.

[24] Gelfand I. M., MacPherson R. D., “A combinatorial formula for the Pontrjagin classes”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26**:2 (1992), 304–309.

[25] Goldstein R. Z., Turner E. C., “A formula for Stiefel-Whitney homology classes”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **58** (1976), 339–342.

[26] Gorodkov D., “A 15-Vertex Triangulation of the Quaternionic Projective Plane”, *Discrete and Computational Geometry*, **62** (2019), 348–373.

[27] Halperin S., Toledo D., “Stiefel-Whitney homology classes”, *Ann. Math.*, **86**:3 (1972), 511–525.

[28] Heawood P. J., “Map colouring theorems”, *Quarterly J. Math. Oxford Ser.*, **24** (1890), 322–339.

[29] Jungerman M., Ringel G., “Minimal triangulations on orientable surfaces”, *Acta Math.*, **145** (1980), 121–154.

[30] Kühnel W., Banchoff T. F., “The 9-vertex complex projective plane”, *Math. Intell.*, **5**:3 (1983), 11–22.

[31] Kühnel W., "Higher dimensional analogues of Császár's torus", *Results in Mathematics*, **9** (1986), 95–106.

[32] Levitt N., Rourke C., "The existence of combinatorial formulae for characteristic classes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **239** (1978), 391–397.

[33] Lutz F. H., "Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds https://arxiv.org/abs/math/0506372.".

[34] MacPherson R., "The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class", *Séminaire Bourbaki No. 497. Lecture Notes in Math. V. 677. Heidelburg: Springer*, 1977.

[35] Milin L., "A combinatorial computation of the first Pontryagin class of the complex projective plane", *Geom. Dedicata*, **49** (1994), 253–291.

[36] Pachner U., "P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings", *European J. Combin.*, **12**:2 (1991), 129–145.

[37] Stiefel E., "Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten", *Comment. Math. Helv.*, **8** (1936), 305–353.

[38] Thom R., "Les classes charactéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées", *Symposium Internacional de Topologia Algebraica. Mexico: La Universidad Nacional Autonoma de Mexico y la Unesco*, 1958, 54–67.

[39] Whitney H., "On the Theory of Sphere Bundles", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **26**:2 (1940), 148–153.